UMSU PRESS

Buku Ajar

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Dr. Amirul Syah, M.Si.

BUKU AJAR
MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Oleh

Dr. Amirul Syah, M.Si.

HAK CIPTA DILINDUNGI UNDANG-UNDANG

Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian isi buku ini dalam bentuk apapun, baik secara elektronik maupun mekanis, termasuk memfotocopy, merekam dan dengan sistem penyimpanan lainnya tanpa izin tertulis dari penulis

BUKU AJAR

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Oleh

Dr. Amirul Syah, M.Si.

UMSU PRESS

Judul
Buku Ajar Matematika Ekonomi Dan Bisnis

Penulis
Dr. Amirul Syah, M.Si.

Layouter
Rizki Yunida Br Panggabean, S.Pd.

Cetakan Pertama; September 2025
(viii + 251 hlm); 15 x 23 cm

ISBN : 978-634-236-190-0
: 978-634-236-191-7 (E-book)

Penerbit

UMSU PRESS

Redaksi
Jalan Kapten Mukhtar Basri No 3 Medan, 20238
Telepon, 061-6626296, Fax. 061-6638296
Email; umsupress@umsu.ac.id
Website; http://umsupress.umsu.ac.id/
Anggota IKAPI Sumut, No: 38/Anggota Luar Biasa/SUT/2020
Anggota APPTI, Nomor: 005.053.1.09.2018
Anggota APPTIMA, Nomor: 01/B/AnggotaAPPTIMA/2023

DAFTAR ISI

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan penyusunan *Buku Ajar Matematika Ekonomi* ini. Buku ini disusun sebagai salah satu upaya untuk menyediakan bahan ajar yang sistematis, praktis, dan mudah dipahami, khususnya bagi mahasiswa yang sedang mempelajari penerapan matematika dalam bidang ekonomi.

Matematika merupakan salah satu alat analisis yang sangat penting dalam memahami fenomena ekonomi. Dengan dukungan konsep dan metode matematis, berbagai permasalahan ekonomi dapat dianalisis secara lebih terukur, logis, dan obyektif. Oleh karena itu, buku ajar ini diharapkan mampu menjadi jembatan bagi mahasiswa dalam menghubungkan teori ekonomi dengan penerapan metode matematika.

Isi buku ini mencakup pembahasan mengenai konsep dasar aljabar, fungsi dan grafik, diferensial serta integral, hingga penerapan matematika dalam analisis ekonomi, seperti optimasi dan model pertumbuhan. Setiap bab disajikan dengan penjelasan konsep, contoh soal, serta latihan agar mahasiswa dapat menguasai materi secara bertahap.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi penyempurnaan pada edisi berikutnya.

Semoga *Buku Ajar Matematika Ekonomi* ini dapat memberikan manfaat bagi mahasiswa, dosen, maupun pembaca lainnya yang tertarik mendalami penerapan matematika dalam bidang ekonomi.

Medan, Agustus 2025
Dr. Amirulsyah, MSi

Pendahuluan

A. Deskripsi Mata Kuliah: Matematika Ekonomi dan Bisnis

Mata kuliah *Matematika Ekonomi dan Bisnis* merupakan bagian penting dari kurikulum di program studi ekonomi, manajemen, akuntansi, dan bidang bisnis lainnya. Mata kuliah ini dirancang untuk memberikan fondasi yang kuat dalam pemahaman konsep-konsep matematika yang aplikatif dan relevan dalam analisis serta pengambilan keputusan di bidang ekonomi dan bisnis. Dalam pendekatan *Outcome-Based Education* (OBE), pembelajaran tidak hanya difokuskan pada penguasaan teori, tetapi lebih pada pencapaian kompetensi yang dapat diterapkan secara langsung dalam situasi nyata.

Mata kuliah ini memberikan pemahaman kepada mahasiswa tentang bagaimana matematika menjadi alat bantu yang efektif dalam menjelaskan dan memodelkan fenomena ekonomi dan bisnis. Pemodelan matematis yang tepat akan membantu mahasiswa berpikir secara logis, sistematis, dan terstruktur dalam menganalisis permasalahan yang kompleks, baik dalam skala mikro maupun makro, serta dalam operasional dan strategi bisnis.

Materi yang dibahas meliputi berbagai konsep dasar matematika yang telah disesuaikan dengan kebutuhan dunia ekonomi dan bisnis, antara lain: fungsi dan grafiknya, persamaan dan sistem persamaan linear dan non-linear, matriks dan determinan, limit dan kontinuitas, turunan dan aplikasi dalam ekonomi (seperti elastisitas, titik maksimum dan minimum keuntungan, analisis biaya marjinal), integral dan penggunaannya dalam menghitung total pendapatan dan biaya, serta pengenalan metode optimasi ekonomi menggunakan pendekatan matematika.

Melalui pembelajaran ini, mahasiswa akan mampu memahami keterkaitan antara variabel-variabel ekonomi dan bagaimana perubahan satu variabel dapat memengaruhi variabel lainnya.

Mahasiswa juga dilatih untuk mampu menyusun dan menyelesaikan model-model matematis dari permasalahan nyata di dunia ekonomi dan bisnis, seperti menentukan titik impas, analisis sensitivitas, prediksi pertumbuhan, serta pengambilan keputusan berbasis data kuantitatif.

Pendekatan OBE yang diterapkan dalam mata kuliah ini menitikberatkan pada pencapaian Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL) yang sesuai, di antaranya adalah kemampuan berpikir kritis dan analitis, keterampilan kuantitatif, kemampuan pemecahan masalah, serta integritas akademik. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK) dari Matematika Ekonomi dan Bisnis difokuskan pada:

1. Memahami konsep-konsep dasar matematika yang relevan dalam bidang ekonomi dan bisnis. Mahasiswa diharapkan dapat menjelaskan fungsi, persamaan, limit, turunan, integral, dan matriks serta aplikasinya dalam ekonomi dan bisnis.
2. Menerapkan konsep dan teknik matematika untuk memecahkan masalah ekonomi dan bisnis. Mahasiswa akan belajar menggunakan teknik matematis untuk menganalisis pendapatan, biaya, laba, elastisitas harga, titik impas, pertumbuhan ekonomi, dan lainnya.
3. Menganalisis dan menafsirkan hasil perhitungan matematis dalam konteks pengambilan keputusan. Mahasiswa akan diarahkan untuk tidak hanya berhenti pada penyelesaian numerik, tetapi juga pada interpretasi hasil dan implikasinya terhadap keputusan ekonomi/bisnis.
4. Mengembangkan kemampuan logika, abstraksi, dan berpikir sistematis melalui pendekatan kuantitatif. Melalui latihan dan studi kasus, mahasiswa diasah kemampuannya dalam mengembangkan pemikiran logis yang berguna untuk memecahkan persoalan-persoalan kompleks.

Proses pembelajaran, digunakan metode interaktif dan partisipatif, seperti diskusi kelas, pemecahan studi kasus, presentasi kelompok, dan penggunaan teknologi (software spreadsheet, kalkulator ilmiah, atau aplikasi grafis lainnya) untuk mendukung pemahaman dan penerapan konsep. Evaluasi pembelajaran dilakukan secara berkelanjutan melalui tugas individu, kuis, ujian tengah semester, ujian akhir semester, serta proyek mini yang melibatkan pemodelan matematis dari permasalahan ekonomi dan bisnis.

Mata kuliah ini juga membekali mahasiswa dengan kemampuan belajar sepanjang hayat (*lifelong learning*) dengan menekankan pentingnya ketelitian, konsistensi berpikir, dan keterampilan numerik yang menjadi dasar bagi mata kuliah lanjutan seperti ekonometrika, keuangan kuantitatif, manajemen operasi, dan analisis investasi.

Selain itu, pembelajaran berbasis OBE memastikan bahwa setiap mahasiswa tidak hanya memahami isi materi, tetapi juga mampu mendemonstrasikan kompetensi yang diperlukan dalam dunia profesional. Oleh karena itu, hasil dari pembelajaran ini akan berguna secara langsung dalam dunia kerja, terutama dalam bidang perencanaan keuangan, penganggaran, strategi harga, analisis investasi, evaluasi proyek, dan lain-lain.

Sebagai contoh penerapan nyata, mahasiswa akan dilibatkan dalam perhitungan dan analisis margin keuntungan sebuah perusahaan, atau mengevaluasi elastisitas permintaan terhadap harga suatu produk, serta memperkirakan dampak perubahan biaya bahan baku terhadap total biaya produksi. Semua ini menunjukkan bahwa matematika bukan hanya sebagai teori, tetapi sebagai alat pengambilan keputusan yang konkret dalam dunia ekonomi dan bisnis yang dinamis.

Dengan demikian, mata kuliah Matematika Ekonomi dan Bisnis tidak hanya penting secara akademik, tetapi juga strategis dalam mempersiapkan mahasiswa menghadapi tantangan dunia kerja yang menuntut kecepatan, ketepatan, dan kemampuan berpikir kuantitatif yang tinggi. Mahasiswa yang mengikuti mata kuliah ini diharapkan memiliki kemampuan analitis yang kuat, keterampilan pemecahan masalah berbasis data, dan siap untuk mengaplikasikan matematika dalam menyusun strategi ekonomi dan bisnis yang efektif.

B. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah Matematika Ekonomi dan Bisnis

CPMK 1: Menjelaskan konsep dasar matematika yang digunakan dalam ekonomi dan bisnis.

Sub-CPMK:

1.1 Mengidentifikasi elemen dasar matematika (bilangan, variabel, operator, dan fungsi).

1.2 Menjelaskan pentingnya matematika dalam kegiatan ekonomi dan bisnis.

Indikator:

- Dapat menyebutkan dan menjelaskan minimal 4 konsep dasar matematika.
- Dapat memberikan contoh penerapan konsep dalam situasi ekonomi nyata.

CPMK 2: Memahami dan menggambarkan fungsi matematika dan grafiknya.

Sub-CPMK:

2.1 Mengidentifikasi jenis-jenis fungsi (linear, kuadrat, eksponensial, logaritmik).

2.2 Menggambarkan grafik fungsi dalam bidang ekonomi.

Indikator:

- Mahasiswa dapat menentukan jenis fungsi dari persamaan yang diberikan.
- Mahasiswa dapat membuat grafik fungsi dan menafsirkannya dalam konteks ekonomi (misalnya permintaan, penawaran).

CPMK 3: Menyelesaikan permasalahan sistem persamaan linear dan non-linear.
Sub-CPMK:
3.1 Menggunakan metode eliminasi, substitusi, dan matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan.
3.2 Menerapkan penyelesaian dalam konteks ekonomi (alokasi, produksi).
Indikator:

- Mahasiswa menyelesaikan sistem persamaan dua dan tiga variabel.
- Mahasiswa menyusun model ekonomi sederhana dari kasus nyata.

CPMK 4: Menggunakan konsep matriks dan determinan dalam pemecahan masalah ekonomi.
Sub-CPMK:
4.1 Menghitung operasi dasar matriks dan determinan.
4.2 Mengaplikasikan matriks untuk analisis input-output dan system persamaan linear.
Indikator:

- Mahasiswa mampu menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode invers matriks.
- Mahasiswa menggunakan matriks untuk kasus ekonomi seperti model Leontief.

CPMK 5: Memahami konsep limit dan kontinuitas dalam fungsi ekonomi.
Sub-CPMK:
5.1 Menentukan nilai limit suatu fungsi.
5.2 Menjelaskan arti ekonomi dari limit (misal marginal utility, pendekatan nilai).
Indikator:

- Mahasiswa menyelesaikan minimal 3 soal limit dengan benar.

- Mahasiswa dapat mengaitkan hasil limit dengan konsep marginal dalam ekonomi.

CPMK 6: Menggunakan turunan dalam analisis ekonomi mikro dan makro.
Sub-CPMK:
6.1 Menghitung turunan pertama dan kedua dari fungsi satu variabel.
6.2 Menerapkan turunan untuk menganalisis elastisitas, biaya marjinal, pendapatan marjinal, dan titik maksimum-minimum.
Indikator:
- Mahasiswa menyelesaikan soal turunan fungsi permintaan dan penawaran.
- Mahasiswa dapat menentukan titik optimal (maksimum/laba atau minimum/biaya).

CPMK 7: Menganalisis fungsi multivariabel dalam kegiatan ekonomi.
Sub-CPMK:
7.1 Menghitung turunan parsial.
7.2 Menggunakan turunan parsial untuk menganalisis fungsi produksi dan utilitas.
Indikator:
- Mahasiswa mampu mencari marginal product dan marginal utility dari fungsi dua variabel.
- Mahasiswa menafsirkan arti ekonomi dari hasil turunan parsial.

CPMK 8: Menggunakan integral dalam menyelesaikan persoalan ekonomi.
Sub-CPMK:
8.1 Menghitung integral tak tentu dan tentu.
8.2 Mengaplikasikan integral dalam menghitung total biaya, pendapatan, dan surplus konsumen/produsen.

Indikator:

- Mahasiswa mampu menghitung area di bawah kurva permintaan.
- Mahasiswa menghitung total biaya dari fungsi biaya marjinal.

CPMK 9: Memahami konsep dan metode optimasi dalam ekonomi.
Sub-CPMK:

9.1 Mengidentifikasi masalah optimasi ekonomi.
9.2 Menggunakan metode matematika (turunan dan Lagrange) untuk menyelesaikannya.

Indikator:

- Mahasiswa menyelesaikan soal optimasi fungsi produksi atau keuntungan.
- Mahasiswa menerapkan metode Lagrange untuk kasus dengan kendala.

CPMK 10: Menginterpretasikan hasil perhitungan dalam konteks pengambilan keputusan.
Sub-CPMK:

10.1 Menyimpulkan arti matematis dari solusi numerik.
10.2 Mengaitkan hasil solusi dengan kebijakan atau strategi ekonomi dan bisnis.

Indikator:

- Mahasiswa menjelaskan makna hasil turunan dalam konteks biaya marjinal.
- Mahasiswa menyarankan keputusan berdasarkan data perhitungan.

CPMK 11: Mengintegrasikan alat bantu teknologi dalam penyelesaian soal matematika ekonomi.
Sub-CPMK:

11.1 Menggunakan Excel atau software lain untuk menyusun model matematis.

11.2 Memvisualisasi data dan grafik matematika ekonomi.

Indikator:

- Mahasiswa membuat grafik fungsi ekonomi menggunakan Excel.
- Mahasiswa menyusun model sistem persamaan dalam spreadsheet.

CPMK 12: Bekerja secara tim dalam menyelesaikan kasus aplikasi matematika ekonomi.

Sub-CPMK:

12.1 Berkolaborasi dalam menganalisis kasus nyata dengan pendekatan matematis.

12.2 Menyusun laporan kelompok secara sistematis.

Indikator:

- Mahasiswa menyusun laporan aplikasi matematika bisnis dalam tim.
- Mahasiswa mempresentasikan hasil analisis kelompok secara lisan.

CPMK 13: Mengembangkan keterampilan berpikir logis, sistematis, dan kritis.

Sub-CPMK:

13.1 Menguraikan masalah ekonomi menjadi model matematis.

13.2 Menyusun argumen berdasarkan perhitungan matematis.

Indikator:

- Mahasiswa menyusun model permintaan atau biaya dari data studi kasus.
- Mahasiswa menjelaskan logika di balik solusi numerik secara tertulis.

CPMK 14: Menunjukkan sikap tanggung jawab, kejujuran, dan etika akademik.

Sub-CPMK:

14.1 Menyelesaikan tugas secara mandiri tanpa plagiarisme.

14.2 Menunjukkan sikap disiplin dan tanggung jawab dalam proses pembelajaran.

Indikator:

- Mahasiswa menyerahkan tugas tepat waktu dengan sumber kutipan yang benar.
- Mahasiswa aktif berpartisipasi dalam diskusi kelas.

C. Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

1. Mahasiswa mampu menjelaskan peran dan ruang lingkup matematika dalam analisis ekonomi dan bisnis..
2. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan ekonomi menggunakan aljabar dasar dan sifat-sifat bilangan.
3. Mahasiswa mampu menggambarkan dan menganalisis fungsi linear dan non-linear dalam konteks ekonomi.
4. Mahasiswa mampu memformulasikan dan menyelesaikan sistem persamaan linear serta menginterpretasikan hasilnya dalam masalah bisnis.
5. Mahasiswa mampu menggunakan konsep matriks dan determinan untuk menyelesaikan masalah ekonomi dan bisnis.
6. Mahasiswa mampu memodelkan dan menyelesaikan masalah optimasi linear dengan kendala terbatas.
7. Mahasiswa mampu menjelaskan dan menganalisis bentuk fungsi non-linear seperti kuadrat, eksponensial, dan logaritmik dalam konteks ekonomi.
8. Mahasiswa mampu menggunakan turunan pertama dan kedua untuk analisis marginal dan optimasi.
9. Mahasiswa mampu menganalisis fungsi dua variabel atau lebih serta menghitung turunannya.

10. Mahasiswa mampu menghitung dan menginterpretasikan elastisitas harga, pendapatan, dan silang.
11. Mahasiswa mampu menggunakan integral untuk menghitung area, pendapatan total, surplus konsumen dan produsen.
12. Mahasiswa mampu menghitung nilai masa kini dan masa datang dari arus kas menggunakan barisan dan deret.
13. Mahasiswa mampu menyusun dan menganalisis model matematika sederhana untuk persoalan ekonomi nyata.
14. Mahasiswa mampu mengevaluasi dampak perubahan variabel ekonomi terhadap hasil keputusan bisnis melalui simulasi.

D. Materi Pembelajaran

1	- Pengertian Matematika - Matematika Ekonomi - Ekonometrika
2	- Pengertian Himpunan dan Fungsi - Pengertian Fungsi Linier, membentuk fungsi/model linier dan grafik fungsi linier - Pengertian Fungsi Non Linier, Fungsi Pangkat Dua dan Grafik Fungsi non Linier
3	- Aplikasi Fungsi dalam Ilmu Ekonomi - Fungsi Permintaan dan Fungsi Penawaran serta grafik Fungsi Permintaan dan Fungsi Penawaran - Keseimbangan Pasar dan grafik - Pengaruh Pajak dan Subsidi terhadap Keseimbangan Pasar - Grafik Keseimbangan Pasar sebelum dan sesudah Pengaruh Pajak dan Subsidi terhadap Keseimbangan Pasar - Fungsi Biaya, Fungsi Pendapatan dan Analisis Break Event Point serta grafik

	- Fungsi Pendapatan Nasional, Fungsi Konsumsi, Fungsi Tabungan dan Keseimbangan Pendapatan Nasional
4	- Differensial Fungsi Satu Variabel Bebas - Optimisasi Fungsi Satu Variable Bebas - Differensial Dua Variabel Bebas atau Lebih - Optimisasi Fungsi Dua Variable Bebas
5	- Aplikasi Differensial dalam Ilmu Ekonomi - Elastisitas - Optimisasi Biaya Total, Biaya Rata-rata dan Biaya Marginal - Optimisasi Pendapatan Total, Pendapatan Rata-rata dan Marginal Pendapatan - Optimisasi Laba Total, Laba Rata-rata dan Marginal Laba - Optimisasi Fungsi Terkendala, Optimisasi Produksi, Optimisasi Utility
6	- Matriks, Determinan Matriks - Adjoint Matriks dan Transpose Matriks - Aturan Crammer
7	- Aplikasi Matriks Dalam Ilmu Ekonomi - Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier - Analisis Input – Output

E. Persyaratan Pembelajaran Mata Kuliah Matematika Ekonomi dan Bisnis

1. Persyaratan Akademik (Prerequisite)

Untuk mengikuti mata kuliah ini secara efektif, mahasiswa diharapkan telah menempuh dan menguasai:

- Matematika Dasar atau Matematika SMA/MA: Mahasiswa harus memahami operasi dasar matematika seperti aljabar, pecahan, persamaan linear, sistem persamaan, dan grafik fungsi.

- Pengantar Ilmu Ekonomi *(jika tersedia)*: Memiliki pemahaman dasar tentang konsep ekonomi mikro dan makro seperti permintaan, penawaran, biaya, pendapatan, dan laba.

2. **Kesiapan Belajar Mahasiswa diharapkan memiliki:**

- Keterampilan numerik dasar
- Kemampuan berpikir logis dan analitis
- Kedisiplinan dalam menyelesaikan latihan soal
- Kemampuan menggunakan alat bantu teknologi sederhana (seperti kalkulator ilmiah dan spreadsheet/Excel)

3. **Sumber Belajar yang Wajib Disiapkan**

- Buku Teks Utama dan Buku Referensi Pendukung
- Modul bahan ajar dari dosen
- Kalkulator ilmiah
- Laptop/komputer dengan aplikasi spreadsheet (MS Excel/Google Sheets)
- Akses ke internet untuk pencarian referensi tambahan dan LMS

4. **Waktu Belajar Mandiri**

Untuk keberhasilan dalam mata kuliah ini, mahasiswa perlu mengalokasikan waktu belajar mandiri minimal 2–3 jam per minggu, di luar waktu perkuliahan, untuk:

- Mengulas kembali materi perkuliahan
- Menyelesaikan tugas latihan dan soal-soal
- Membaca materi tambahan atau jurnal ilmiah
- Mengerjakan proyek atau studi kasus (jika ada)

5. **Perangkat Lunak yang Dianjurkan**
- **Microsoft Excel atau Google Sheets**:
- Untuk membantu simulasi ekonomi, perhitungan biaya, laba maksimum, dan analisis sensitivitas.
- **Desmos atau GeoGebra** *(opsional)*:
  Untuk membantu visualisasi grafik fungsi dan kalkulasi turunan/integral secara grafis.

6. **Etika Akademik**
   Mahasiswa diwajibkan untuk:
- Menghindari plagiarisme dalam tugas dan ujian
- Bekerja mandiri pada evaluasi individu
- Berkontribusi aktif dalam diskusi kelas atau kelompok

F. Penggunaan Buku ajar Mata Kuliah Matematika Ekonomi dan Bisnis

1. Fungsi dan Peran Buku Ajar

Buku ajar ini disusun sebagai sumber utama pembelajaran yang:
- Membantu mahasiswa memahami konsep dasar hingga lanjutan dalam matematika ekonomi dan bisnis secara sistematis.
- Menjadi panduan utama dosen dalam perkuliahan, baik dalam bentuk tatap muka, blended learning, maupun daring penuh.
- Menjadi acuan tugas dan evaluasi pembelajaran, baik dalam bentuk latihan soal, studi kasus, kuis, maupun proyek terapan.

2. Keterkaitan dengan Capaian Pembelajaran (CPMK dan CPL)

Setiap bab dalam buku ajar ini dirancang selaras dengan Sub-CPMK, sehingga:
- Mahasiswa dapat melacak ketercapaian hasil belajar dengan jelas.

- Materi pembelajaran mendukung kemampuan analisis, pemodelan, dan pemecahan masalah ekonomi dan bisnis dengan pendekatan matematis.

3. Struktur Buku Ajar

Buku ajar ini terdiri dari 14 bab, yang masing-masing mencerminkan satu pertemuan utama dalam satu semester. Setiap bab mencakup:

- Tujuan Pembelajaran (Learning Outcomes)
- Penjelasan Teori dan Konsep
- Contoh Aplikasi dalam Ekonomi dan Bisnis
- Soal Latihan
- Studi Kasus atau Simulasi
- Evaluasi Mandiri

4. Strategi Penggunaan dalam Perkuliahan

a. Sebelum Kelas (Pre-Class)

- Mahasiswa membaca ringkasan teori, daftar rumus, atau definisi penting dari bab terkait.
- Mengisi pertanyaan reflektif awal atau *pre-test* untuk mengukur kesiapan topik.

b. Saat Kelas (In-Class)

- Dosen menggunakan buku ajar sebagai sumber utama penjelasan teori dan contoh soal.
- Mahasiswa menyelesaikan soal terapan atau simulasi yang diambil dari buku ajar secara berkelompok atau individu.

c. Setelah Kelas (Post-Class)

- Mahasiswa diminta mengerjakan soal evaluasi, proyek mini, atau jurnal reflektif dari akhir bab.
- Mahasiswa mengacu kembali ke buku ajar untuk menyiapkan UTS dan UAS berdasarkan ringkasan materi, peta konsep, dan glosarium.

5. **Kelebihan Buku Ajar**

- Disusun secara kontekstual dengan kebutuhan mahasiswa ekonomi dan bisnis.
- Bahasa yang sederhana namun ilmiah, cocok untuk mahasiswa S1.
- Dilengkapi dengan ilustrasi grafik, tabel, simulasi, dan studi kasus nyata.
- Menyertakan latihan dengan pembahasan lengkap, sehingga mendukung belajar mandiri.
- Mengintegrasikan penggunaan teknologi sederhana (seperti spreadsheet).

6. **Kesesuaian dengan Kurikulum dan Profil Lulusan**

   Buku ajar ini mendukung profil lulusan yang:

- Mampu berpikir logis, kuantitatif, dan sistematis.
- Mampu menggunakan alat bantu matematis dalam menganalisis dan memecahkan persoalan ekonomi dan bisnis.
- Mampu beradaptasi dengan dunia kerja yang berbasis data dan analitik.

7. **Pengayaan dan Referensi Tambahan**

   Meskipun buku ajar menjadi rujukan utama, mahasiswa juga dianjurkan untuk:

- Membaca buku referensi internasional (seperti Chiang, Sydsaeter, Haeussler).
- Menjelajahi sumber daring terpercaya, seperti jurnal-jurnal ekonomi aplikatif dan simulasi interaktif.

MATERI I

Pengertian Matematika, Matematika Ekonomi dan Bisnis Serta Ekonometrika

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut:

1. **Pengertian Matematika**

   Mahasiswa mampu:
   - Menjelaskan pengertian umum dan esensial dari matematika sebagai ilmu logika dan kuantitatif.
   - Memahami peran matematika sebagai alat berpikir sistematis dan analitis dalam menyelesaikan berbagai permasalahan.
   - Mengidentifikasi karakteristik matematika seperti deduktif, simbolik, dan konsisten.

2. **Matematika Ekonomi dan Bisnis**

   Mahasiswa mampu:
   - Menjelaskan pengertian matematika ekonomi dan bisnis sebagai cabang terapan dari matematika.
   - Menganalisis bagaimana konsep dan metode matematika digunakan untuk memodelkan fenomena ekonomi dan bisnis.
   - Menunjukkan keterkaitan antara model matematika dengan pengambilan keputusan ekonomi dan manajerial (misalnya optimasi, elastisitas, biaya, dan keuntungan).
   - Mengaplikasikan fungsi matematika (linear, kuadrat, eksponensial, dsb.) dalam konteks ekonomi mikro dan makro.

3. **Ekonometrika**

   Mahasiswa mampu:
   - Menjelaskan pengertian ekonometrika sebagai gabungan dari matematika, statistik, dan teori ekonomi.

- Memahami tujuan utama ekonometrika, yaitu menguji hipotesis dan membangun model kuantitatif dari teori ekonomi.
- Menjelaskan perbedaan antara model ekonometrika dengan model ekonomi murni atau statistik murni.
- Menggunakan dasar-dasar teknik regresi dan estimasi parameter untuk menganalisis data ekonomi secara empiris.

B. Materi Pembelajaran: Pengertian Matematika, Matematika Ekonomi dan Bisnis, serta Ekonometrika

1. Pengertian Matematika

Matematika adalah ilmu yang mempelajari tentang struktur, pola, dan hubungan antar objek yang bersifat abstrak, seperti bilangan, bentuk, dan ruang. Matematika berkembang dari kebutuhan manusia untuk menghitung, mengukur, dan memahami bentuk serta pola dalam kehidupan sehari-hari. Ia dibangun melalui pendekatan deduktif, di mana kebenaran suatu pernyataan diturunkan secara logis dari pernyataan atau aksioma sebelumnya.

Matematika memiliki karakteristik khas, yaitu bersifat objektif, sistematis, konsisten, dan universal. Karena menggunakan simbol-simbol formal, matematika mampu menyederhanakan konsep-konsep kompleks menjadi model-model yang mudah dianalisis. Dengan demikian, matematika tidak hanya berguna sebagai alat hitung, melainkan juga sebagai alat berpikir logis, kritis, dan analitis.

Dalam konteks keilmuan, matematika memiliki fungsi sebagai dasar bagi ilmu-ilmu lain, termasuk fisika, teknik, statistika, ekonomi, bahkan ilmu sosial. Dalam kehidupan praktis, matematika juga digunakan dalam aktivitas sehari-hari, seperti menghitung anggaran belanja, membuat rencana keuangan, atau memprediksi pertumbuhan usaha.

Matematika digunakan dalam ekonomi untuk menyusun model, menganalisis hubungan antar variabel ekonomi, serta membuat prediksi. Fungsi, persamaan, grafik, dan turunan adalah alat utama dalam menggambarkan konsep-konsep seperti permintaan dan penawaran, elastisitas, biaya, pendapatan, dan keuntungan.

2. Matematika Ekonomi dan Bisnis

Matematika ekonomi dan bisnis adalah cabang dari matematika terapan yang digunakan untuk menganalisis dan menyelesaikan persoalan ekonomi dan bisnis secara kuantitatif. Ilmu ini memanfaatkan konsep-konsep dasar matematika, seperti fungsi, persamaan, turunan, integral, dan optimasi untuk menggambarkan dan memecahkan berbagai permasalahan ekonomi.

Tujuan utama dari matematika ekonomi dan bisnis adalah untuk mengubah fenomena ekonomi yang kompleks menjadi model matematis yang sistematis, sehingga lebih mudah dianalisis dan digunakan untuk pengambilan keputusan. Dengan menggunakan model matematis, hubungan antar variabel ekonomi seperti harga, pendapatan, biaya, dan laba dapat diuraikan dengan jelas.

Contoh sederhana penerapan matematika dalam ekonomi adalah penggunaan fungsi permintaan dan penawaran. Fungsi permintaan menggambarkan hubungan antara harga suatu barang dan jumlah barang yang diminta, sedangkan fungsi penawaran menggambarkan hubungan antara harga dan jumlah barang yang ditawarkan. Dengan menggunakan kedua fungsi ini, dapat dianalisis bagaimana keseimbangan pasar terbentuk, serta bagaimana perubahan harga atau pendapatan mempengaruhi kuantitas yang diminta atau ditawarkan.

Matematika ekonomi juga digunakan dalam analisis biaya dan keuntungan, elastisitas harga, teori produksi dan konsumsi, serta dalam proses optimasi seperti memaksimalkan laba atau meminimalkan biaya. Misalnya, perusahaan menggunakan fungsi biaya untuk menentukan kombinasi input yang paling efisien, atau menggunakan fungsi laba untuk menentukan tingkat produksi optimal.

Selain itu, matematika bisnis mencakup penerapan matematika dalam berbagai bidang praktis seperti perbankan, akuntansi, pemasaran, manajemen keuangan, dan logistik. Contohnya adalah penggunaan konsep bunga majemuk dalam menghitung nilai masa depan investasi, atau penggunaan analisis break-even untuk menentukan titik impas usaha.

Matematika ekonomi dan bisnis menekankan kemampuan mahasiswa untuk menerjemahkan masalah nyata ke dalam model matematis, menganalisis model tersebut dengan metode kuantitatif, serta menginterpretasikan hasilnya untuk pengambilan keputusan yang tepat. Oleh karena itu, keterampilan logika, penalaran, dan penguasaan alat-alat matematis sangat diperlukan.

3. Matematika Ekonomi dan Bisnis (Khusus)

Aplikasi Khusus:

Matematika ekonomi dan bisnis mengkhususkan pada penerapan kalkulus, aljabar, dan optimasi dalam konteks ekonomi mikro dan makro. Misalnya, menghitung maksimum keuntungan, minimum biaya, atau titik produksi optimal.

4. Ekonometrika

Ekonometrika merupakan cabang ilmu ekonomi yang menggabungkan teori ekonomi, matematika, dan statistik untuk menguji hipotesis ekonomi dan memperkirakan hubungan kuantitatif antar variabel ekonomi. Tujuan utama dari ekonometrika adalah memberikan landasan empiris terhadap teori ekonomi melalui analisis data.

Dalam praktiknya, ekonometrika digunakan untuk menjawab pertanyaan seperti: Apakah benar konsumsi rumah tangga meningkat seiring dengan meningkatnya pendapatan? Seberapa besar pengaruh suku bunga terhadap tingkat investasi? Apakah kebijakan subsidi benar-benar meningkatkan produksi pertanian? Pertanyaan-pertanyaan seperti ini tidak cukup hanya dijawab dengan teori ekonomi saja, melainkan juga harus didukung dengan data dan analisis statistik.

Proses dalam ekonometrika biasanya dimulai dari penyusunan model teoritis, yaitu persamaan yang menggambarkan hubungan antar variabel. Kemudian, model tersebut diubah ke dalam bentuk matematis menggunakan simbol dan fungsi. Selanjutnya, model tersebut diuji dengan menggunakan data aktual, melalui teknik estimasi seperti regresi linier.

Regresi linier adalah metode paling dasar dalam ekonometrika, di mana kita mengukur sejauh mana satu atau lebih variabel independen memengaruhi variabel dependen. Misalnya, kita ingin mengetahui pengaruh tingkat pendidikan (variabel X) terhadap tingkat pendapatan (variabel Y). Dalam hal ini, ekonometrika membantu mengukur hubungan tersebut secara kuantitatif dan menguji signifikansinya secara statistik.

Selain estimasi parameter, ekonometrika juga melibatkan pengujian asumsi-asumsi model, seperti normalitas, heteroskedastisitas, multikolinearitas, dan autokorelasi. Pengujian ini penting untuk memastikan bahwa hasil analisis dapat dipercaya dan valid.

Ekonometrika sangat penting dalam dunia modern karena membantu pembuat kebijakan, pelaku bisnis, dan peneliti ekonomi untuk mengambil keputusan berbasis data. Tanpa ekonometrika, banyak teori ekonomi hanya bersifat spekulatif dan tidak dapat diuji kebenarannya secara empiris.

Demikian, Ketiga bidang ini matematika, matematika ekonomi dan bisnis, serta ekonometrika merupakan pilar penting dalam analisis kuantitatif di bidang ekonomi dan bisnis. Matematika menyediakan dasar logika dan alat hitung, matematika ekonomi menerapkan alat tersebut untuk membangun model ekonomi yang berguna bagi manajemen dan strategi bisnis, sementara ekonometrika menjembatani antara teori dan kenyataan dengan menguji model ekonomi berdasarkan data nyata. Pemahaman mendalam terhadap ketiganya akan membekali mahasiswa dengan kemampuan berpikir analitis, sistematis, dan berbasis data dalam menyelesaikan masalah nyata di dunia ekonomi dan bisnis.

Tugas Pertanyaan

1. Apa yang dimaksud dengan matematika secara umum, dan mengapa matematika disebut sebagai bahasa universal?
2. Bagaimana peran matematika dalam kehidupan sehari-hari khususnya pada bidang ekonomi dan bisnis?
3. Apa pengertian matematika ekonomi dan bisnis, serta bagaimana penerapannya dalam kegiatan ekonomi modern?
4. Apa yang dimaksud dengan ekonometrika, dan bagaimana peranannya dalam menganalisis data ekonomi?
5. Bagaimana hubungan antara matematika, matematika ekonomi dan bisnis, serta ekonometrika dalam membantu pengambilan keputusan ekonomi?

MATERI II

Himpunan dan Fungsi

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Pembelajaran matematika tidak hanya bertujuan agar siswa mampu menyelesaikan soal secara mekanis, tetapi juga agar mereka dapat memahami konsep-konsep dasar yang menjadi fondasi dalam banyak bidang ilmu, termasuk ekonomi, bisnis, ilmu komputer, dan sains. Dua konsep penting dalam matematika yang memiliki peran fundamental adalah *himpunan* dan *fungsi*. Oleh karena itu, memahami tujuan dari materi pembelajaran ini sangat penting untuk membentuk dasar pemikiran logis dan analitis siswa.

1. Memahami Konsep Dasar Himpunan

Tujuan pertama dari pembelajaran himpunan adalah agar mahasiswa memahami konsep dasar mengenai himpunan. Himpunan adalah kumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas, yang disebut anggota atau elemen himpunan. Dalam kehidupan sehari-hari, konsep ini sering digunakan tanpa disadari, seperti dalam kategori barang, kelompok orang, atau jenis data.

Dengan memahami konsep himpunan, siswa mampu mengelompokkan objek berdasarkan karakteristik tertentu. Mereka dapat mengidentifikasi himpunan bagian, menentukan anggota dari suatu himpunan, dan menggambarkannya melalui notasi simbolik maupun diagram Venn. Pemahaman ini juga menjadi landasan untuk memahami konsep logika matematika, probabilitas, relasi, dan fungsi.

2. Mengembangkan Kemampuan Menyajikan dan Mengoperasikan Himpunan

Tujuan berikutnya adalah melatih kemampuan siswa dalam menyajikan himpunan dalam berbagai bentuk, seperti dengan menyebutkan anggota secara langsung (notasi daftar), menggunakan syarat keanggotaan (notasi pembentuk), atau dengan diagram. Selain itu, siswa juga dituntut untuk dapat melakukan operasi dasar pada himpunan, seperti:

- Irisan (∩): untuk menemukan elemen yang sama dalam dua himpunan.
- Gabungan (∪): untuk menggabungkan seluruh elemen dari dua himpunan.
- Komplemen (A'): untuk menemukan elemen yang tidak termasuk dalam suatu himpunan.
- Selisih (−): untuk mengetahui perbedaan elemen antara dua himpunan.

Penguasaan operasi-operasi tersebut akan membantu dalam menyelesaikan berbagai soal aplikatif, baik dalam bentuk verbal, tabel, maupun grafik.

3. Memahami dan Menggunakan Konsep Fungsi dalam Berbagai Konteks

Setelah memahami himpunan, peserta didik diarahkan untuk memahami fungsi, yang secara umum didefinisikan sebagai relasi khusus dari satu himpunan ke himpunan lain, di mana setiap anggota himpunan domain dipetakan ke tepat satu anggota kodomain. Fungsi adalah konsep yang sangat penting karena menggambarkan hubungan antar variabel dan sering digunakan dalam dunia nyata, terutama dalam bidang ekonomi dan bisnis.

Melalui pembelajaran fungsi, mahasiswa diharapkan mampu:

- Menentukan domain, kodomain, dan range suatu fungsi.
- Mengidentifikasi jenis-jenis fungsi, seperti fungsi linear, kuadrat, eksponensial, dan logaritmik.

- Menggambar grafik fungsi dan menafsirkan maknanya.
- Menentukan nilai fungsi untuk suatu input tertentu.
- Menggunakan fungsi dalam memodelkan permasalahan nyata, seperti pertumbuhan penduduk, permintaan dan penawaran barang, atau perhitungan bunga.

4. Melatih Kemampuan Berpikir Abstrak dan Simbolik

Pembelajaran tentang himpunan dan fungsi melatih siswa dalam berpikir secara abstrak dan simbolik. Mereka belajar untuk memahami simbol-simbol matematika dan menggunakannya untuk menyatakan konsep secara ringkas dan tepat. Hal ini penting karena matematika sebagai bahasa universal mengandalkan simbol untuk menyampaikan ide secara efisien dan akurat.

Kemampuan berpikir abstrak ini sangat penting dalam pengembangan kemampuan logis, yang merupakan landasan berpikir ilmiah. Melalui pembelajaran ini, siswa belajar menyusun argumen logis, membuktikan kebenaran suatu pernyataan, serta menganalisis struktur dari suatu sistem matematika.

5. Meningkatkan Keterampilan Pemecahan Masalah

Materi himpunan dan fungsi tidak hanya diajarkan sebagai teori, tetapi juga sebagai alat untuk menyelesaikan masalah. Oleh karena itu, salah satu tujuan utama dari pembelajaran ini adalah meningkatkan kemampuan pemecahan masalah peserta didik. Melalui latihan-latihan dan studi kasus yang diberikan, siswa belajar mengidentifikasi masalah, menyusun model matematika, menyelesaikannya, dan menafsirkan hasilnya.

Contoh aplikatif seperti menghitung total barang berdasarkan kategori (menggunakan prinsip irisan dan gabungan), menentukan hubungan antara jumlah produksi dan keuntungan (melalui fungsi), atau memprediksi pertumbuhan ekonomi, semuanya melatih siswa menggunakan konsep-konsep tersebut secara kontekstual.

6. Menumbuhkan Kemandirian dan Rasa Percaya Diri dalam Belajar Matematika

Tujuan penting lainnya dari pembelajaran himpunan dan fungsi adalah menumbuhkan kemandirian dan rasa percaya diri mahasiswa dalam belajar matematika. Karena sifatnya yang sistematis dan bertahap, mahasiswa dapat merasakan kemajuan saat mereka memahami konsep dasar sebelum menuju konsep yang lebih kompleks. Keberhasilan dalam memahami materi ini akan memberikan motivasi bagi mahasiswa untuk terus belajar dan tidak takut menghadapi tantangan matematika lainnya.

B. Materi Pembelajaran Himpunan dan Fungsi

Matematika adalah ilmu dasar yang sangat penting dan digunakan dalam hampir semua bidang ilmu. Dua topik fundamental dalam matematika adalah **Himpunan** dan **Fungsi**. Materi ini menjadi landasan untuk memahami konsep-konsep lanjutan seperti aljabar, logika matematika, kalkulus, dan statistik. Dalam ekonomi dan bisnis, konsep fungsi banyak digunakan untuk memodelkan hubungan antar variabel, sementara konsep himpunan digunakan dalam pengelompokan data dan analisis kategori.

1. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas. Objek-objek tersebut disebut **anggota** atau **elemen** dari himpunan. Contoh:

- Himpunan bilangan genap kurang dari 10 = {2, 4, 6, 8}
- Himpunan huruf vokal dalam alfabet = {a, e, i, o, u}

2. Cara Menyatakan Himpunan

Ada tiga cara menyatakan himpunan:

a. **Notasi daftar (enumerasi)**: Menyebutkan semua anggota himpunan. Contoh: A = {1, 2, 3, 4}

b. **Notasi pembentuk**: Menyebutkan sifat atau aturan dari anggota. Contoh: $B = \{x \mid x \text{ bilangan ganjil}, x < 10\}$

c. **Diagram Venn**: Menggambarkan himpunan dalam bentuk lingkaran-lingkaran di dalam persegi universal.

3. Jenis-Jenis Himpunan

- **Himpunan kosong**: tidak memiliki anggota. Notasi: $\emptyset$ atau $\{\}$
- **Himpunan semesta**: seluruh anggota yang mungkin dipertimbangkan
- **Himpunan bagian**: himpunan A disebut bagian dari B jika semua anggota A juga anggota B
- **Himpunan ekivalen**: dua himpunan dengan jumlah anggota sama
- **Himpunan sama**: dua himpunan yang anggotanya sama persis

4. Operasi Himpunan

- **Gabungan (∪)**: Semua elemen dari dua himpunan. Contoh: $A \cup B$
- **Irisan (∩)**: Elemen yang ada di kedua himpunan. Contoh: $A \cap B$
- **Selisih (−)**: Elemen yang hanya ada di A dan tidak di B. Contoh: $A - B$
- **Komplemen (A')**: Elemen yang tidak ada di A, tapi ada di semesta

5. Contoh Soal dan Aplikasi

- Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{3, 4, 5, 6\}$, maka:
    - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - $A \cap B = \{3, 4\}$
    - $A - B = \{1, 2\}$
- **Aplikasi**: Analisis data pelanggan, kategorisasi produk, penyusunan kelompok survei.

C. Fungsi

1. Pengertian Fungsi

Fungsi adalah suatu aturan yang memetakan setiap elemen dari satu himpunan (domain) ke tepat satu elemen di himpunan lain (kodomain). Jika x dari domain dipetakan ke y di kodomain, maka ditulis f(x) = y.

Contoh fungsi:

- Fungsi f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan aturan f(x) = 2x + 1

2. Unsur-Unsur dalam Fungsi

- **Domain**: Himpunan semua input (x)
- **Kodomain**: Himpunan kemungkinan output (y)
- **Range (daerah hasil)**: Himpunan semua nilai y aktual dari fungsi

3. Cara Menyajikan Fungsi

- Dalam bentuk **rumus** atau **persamaan**
- Dalam bentuk **tabel**
- Dalam bentuk **diagram panah**
- Dalam bentuk **grafik di bidang Kartesius**

4. Jenis-Jenis Fungsi

- **Fungsi Konstan**: f(x) = c
- **Fungsi Linear**: f(x) = ax + b
- **Fungsi Kuadrat**: f(x) = ax^2 + bx+ c
- **Fungsi Polinomial:** $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$
- **Fungsi Eksponensial**: f(x) = a^x
- **Fungsi Logaritma**: f(x)=logax
- **Fungsi Rasional**: f(x) = p(x)/q(x)
- **Fungsi Komposisi**: Gabungan dua fungsi, (f∘g) (x) = f(g(x))
- **Fungsi Invers**: Jika f(a) = b, maka fungsi invers f^{-1}(b) = a

5. **Operasi pada Fungsi**

- Penjumlahan: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- Pengurangan: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Perkalian: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- Pembagian: $(f/g)(x) =f(x)/g(x)$, dengan $g(x)\neq 0$

6. **Grafik Fungsi**

Menggambar grafik fungsi sangat penting untuk memahami bagaimana perubahan input mempengaruhi output. Grafik dapat menunjukkan:

- Titik potong terhadap sumbu X dan Y
- Sifat naik/turun fungsi
- Titik maksimum atau minimum (fungsi kuadrat)

Contoh:
Untuk fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 1$, maka grafiknya adalah parabola yang membuka ke atas dengan titik minimum di (1, 0)

D. Aplikasi Himpunan dalam Ekonomi dan Bisnis

1. Segmentasi Pasar dan Klasifikasi Data

Dalam pemasaran, perusahaan sering kali membagi konsumen ke dalam berbagai kelompok berdasarkan karakteristik tertentu, seperti:

- Usia
- Pendapatan
- Jenis kelamin
- Preferensi produk
- Lokasi geografis

Kelompok-kelompok ini dapat direpresentasikan sebagai **himpunan**. Sebagai contoh:

- A = himpunan konsumen usia 18–25 tahun
- B = himpunan konsumen yang membeli produk premium
- $A \cap B$ = konsumen usia 18–25 tahun yang membeli produk premium

Dengan menggunakan **operasi himpunan** seperti gabungan, irisan, dan selisih, manajer pemasaran dapat menyesuaikan strategi promosi berdasarkan kelompok tertentu.

2. Pengambilan Keputusan Investasi dan Portofolio

Dalam dunia keuangan, investor sering kali memilih portofolio berdasarkan sektor atau risiko. Misalnya:

- Himpunan A: saham sektor teknologi
- Himpunan B: saham berisiko rendah
- $A \cap B$ = saham teknologi berisiko rendah

Investor dapat menggunakan **konsep himpunan bagian** untuk mengevaluasi diversifikasi portofolio dan menghindari konsentrasi risiko yang tinggi pada jenis saham tertentu.

3. Survei Konsumen dan Analisis Preferensi

Dalam survei pasar, perusahaan sering mengelompokkan responden berdasarkan preferensi:

- A = konsumen yang menyukai produk A
- B = konsumen yang menyukai produk B

Dari situ, dapat dihitung:

- Berapa persen konsumen menyukai keduanya ($A \cap B$)
- Berapa persen menyukai salah satu saja ($A \cup B - A \cap B$)
- Berapa persen tidak menyukai keduanya (komplemen dari $A \cup B$)

Ini sangat berguna dalam menentukan **strategi diferensiasi produk**.

4. Sistem Informasi Manajemen dan Database

Dalam sistem informasi bisnis, data disimpan dalam bentuk tabel dan relasi yang sebenarnya menggunakan prinsip-prinsip **himpunan**. Relasi antar entitas (seperti pelanggan, transaksi, produk) direpresentasikan melalui **operasi himpunan** seperti JOIN, SELECT, dan UNION dalam basis data. Hal ini memungkinkan perusahaan mengelola data dalam skala besar dengan efisien.

E. Aplikasi Fungsi dalam Ekonomi dan Bisnis

Fungsi dalam matematika menggambarkan hubungan antara dua variabel. Dalam ekonomi dan bisnis, hal ini sering muncul dalam bentuk hubungan antara harga dan jumlah permintaan, biaya dan produksi, laba dan investasi, serta lainnya.

1. Fungsi Permintaan dan Penawaran

- **Fungsi Permintaan (Demand):** Menunjukkan hubungan antara **harga** dan **jumlah barang yang diminta**.

$Qd = a - bP$_

Di mana:

- o Qd : jumlah barang yang diminta
- o P : harga barang
- o a,b : parameter (nilai konstan)

- **Fungsi Penawaran (Supply):**

$Qs = c + dP$

Di mana:

- o Qs : jumlah barang yang ditawarkan
- o P : harga barang

Dengan menggambarkan fungsi permintaan dan penawaran dalam grafik, kita dapat menemukan **harga ekuilibrium** dan **jumlah ekuilibrium**, yaitu titik pertemuan antara keduanya.

2. Fungsi Biaya (Cost Function)

Dalam produksi, biaya total terdiri dari biaya tetap dan biaya variabel. Fungsi biaya:

$TC = FC + VC(Q)$

- TC : total cost
- FC : fixed cost
- VC(Q): variable cost sebagai fungsi dari kuantitas produksi Q

Contoh:

Jika FC = 1000 dan VC(Q) = 20Q, maka:

$TC(Q) = 1000 + 20Q$

3. Fungsi Pendapatan (Revenue Function)

Pendapatan total dihitung dari harga dikalikan kuantitas:

$$TR = P \cdot Q$$

Jika harga adalah fungsi dari kuantitas (misal $P(Q) = 100 - 2Q$, maka:

$TR(Q) = (100 - 2Q) \cdot Q = 100Q - 2Q^2$

4. Fungsi Laba (Profit Function)

Laba adalah selisih antara pendapatan dan biaya:

$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

Jika:

- $TR(Q) = 100Q - 2Q^2$
- $TC(Q) = 20Q + 1000$

Maka:

$\pi(Q) = (100Q - 2Q^2) - (20Q + 1000) = 80Q - 2Q^2 - 1000$

Dengan fungsi laba ini, perusahaan dapat menentukan **kuantitas produksi optimal** yang memaksimalkan laba, yaitu dengan menghitung turunan dari fungsi laba dan mencari titik maksimumnya.

5. Fungsi Produksi

Dalam ekonomi mikro, fungsi produksi menggambarkan output yang dihasilkan dari kombinasi input:

$$Q = f(L,K)$$

Di mana:

- Q: output
- L: tenaga kerja
- K: modal

Contoh: Fungsi produksi Cobb-Douglas:

$Q = A \cdot L\alpha \cdot K\beta$

Fungsi ini digunakan untuk menganalisis efisiensi dan produktivitas.

6. **Fungsi Permintaan Agregat dan Penawaran Agregat**

Dalam makroekonomi, hubungan antara variabel agregat juga direpresentasikan dalam bentuk fungsi:

- Permintaan agregat (AD) sebagai fungsi dari tingkat harga dan pendapatan
- Penawaran agregat (AS) sebagai fungsi dari harga dan tingkat teknologi

Keseimbangan makroekonomi dapat ditemukan melalui fungsi-fungsi ini.

7. **Fungsi Utility (Kepuasan Konsumen)**

Dalam teori perilaku konsumen:

U = f(x1,x2)

- U: utilitas
- x1,x2 : barang yang dikonsumsi

Fungsi utilitas digunakan untuk menentukan kombinasi konsumsi yang memaksimalkan kepuasan konsumen dengan anggaran terbatas.

8. **Fungsi Risiko dan Asuransi**

Perusahaan asuransi menggunakan fungsi probabilitas dan ekspektasi untuk menentukan premi. Fungsi distribusi probabilitas dan ekspektasi digunakan untuk mengukur risiko dan menentukan harga produk keuangan seperti asuransi atau kontrak derivatif.

F. Kelebihan Penggunaan Himpunan dan Fungsi dalam Bisnis

1. **Sistematis dan Objektif**: Kedua konsep ini membantu menyusun informasi dan hubungan antar variabel secara terstruktur.
2. **Analitis**: Memungkinkan pengambilan keputusan berdasarkan perhitungan, bukan intuisi semata.

3. **Pemodelan Nyata**: Mempermudah analisis masalah dunia nyata seperti pengendalian produksi, strategi harga, dan efisiensi operasional.
4. **Fleksibel**: Dapat diaplikasikan pada skala kecil (UMKM) maupun besar (korporasi menengah).

Untuk lebih spesifik, jika P (X) adalah sebuah pernyataan yang bergantung pada variabel x , maka himpunan dari semua x yang membuat pernyataan P(x) benar, dituliskan sebagai { x| P(x)} . Sebagai contoh, { x| x adalah bilangan ganjil yang lebih dari 21}.

Beberapa Contoh Penulisan Himpunan

1. $A = \{a, b, c, d\}$
2. $B = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,e)\}$
3. $C = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
4. $D = \{ 0, 1, 2, 3 \}$
5. E = { x| x adalah bilangan prima yang kurang dari 10 }.

G. Aljabar Himpunan

Konsep Operasi Pada Himpunan

Definisi 1.1

Dua buah himpunan A dan B adalah sama, dinotasikan dengan A = B, jika setiap unsur dari A adalah unsur dari B dan setiap unsur dari B adalah unsur dari A. Secara singkat, A = B jika kedua himpunan ini dibentuk dari unsur-unsur yang sama. Definisi di atas mengakibatkan bahwa sebuah himpunan akan terdefinisi secara lengkap bila kita telah mengetahui anggota-anggotanya. Sebagai contoh {1,2,3} = {3, 1, 2 } .

Relasi dasar dari himpunan adalah himpunan bagian.

Definisi 1.2

Himpunan A disebut himpunan bagian dari (atau termuat di) himpunan B bila setiap unsur dari A adalah juga anggota dari B .

Dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Himpunan bagian biasa juga disebut subhimpunan atau subset.

subset dari sebuah himpunan tertentu, misal S , himpunan ini kita sebut sebagai himpunan semesta. Pemilihan himpunan semesta bergantung kepada konteks yang sedang dibicarakan.

Teorema 1.1

Misalkan A, B, C , adalah subset dari semesta S , maka

a) $A \subseteq A$, $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq S$

b) $A \subseteq \varnothing$, jika dan hanya jika $A = \varnothing$

c) $\{x\} \subseteq A$ jika dan hanya jika $x \in A$

d) jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

e) $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Jika A dan B adalah subset-subset dari himpunan semesta S, operasi gabungan, irisan dan selisih didefinisikan pada definisi berikut

Definisi 1.3

Gabungan dari himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$, adalah subset dari semesta S yang didefinisikan sebagai:

$A \cup B = \{ x \in \in \{x \mid x \in A$ atau $x \in B \}$.

Irisan dari himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \cap B$, adalah subset dari semesta S yang didefinisikan sebagai:

$A \cap B = \{ x \mid x \in A$ dan $x \in B \}$.

Selisih dari himpunan A dan B dinotasikan dengan $A - B$, adalah subset dari semesta S yang didefinisikan sebagai:

$A - B = \{x \mid x \in A$ tetapi $x \notin B \}$.

Syarat perlu dan cukup bagi dua buah himpunan A dan B memiliki unsur bersama adalah $A \cap B \neq \varnothing$. Jika terjadi bahwa $A \cap B = \varnothing$, maka dikatakan bahwa kedua himpunan ini saling lepas.

Contoh 1.1

Misalkan $S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ adalah semesta pembicaraan,

dan misalkan $A = \{1,2,4\}$, dan $B = \{2, 3, 5\}$.

Maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ dan $A \cap B = \{2\}$,

sedangkan komplemen relatif adalah

$$A - B = \{1,4\}, \quad B - A = \{3, 5\}.$$

Sedangkan

$$-A = \{0,3,5,6\}, \quad -B = \{3, 5\}.$$

Perhatikan bahwa:

$A - B$ dan $B - A$ adalah tidak sama dan saling lepas.

Sebagai catatan,

$A - B = B - A$ jika dan hanya jika $A = B$.

Berikut ini adalah teorema yang merupakan konsekuensi yang terkait dengan konsep gabungan, irisan dan komplemen. Teorema ini dapat dibuktikan dengan mudah.

Teorema 1.2

Jika A, B, C, adalah subhimpunan dari sebuah semesta S, maka:

a) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,

b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

e) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$,

f) $A \cup S = S$, $A \cap S = A$

Berikut ini dibahas beberapa sifat komplemen

Teorema 1.3

Misalkan AB, adalah subset dari himpunan semesta S . Maka:

a) $-(-A) = A$,

b) $-\varnothing = S - S = \varnothing$,

c) $A \cup (-A) = S$, $A \cap (-A) = \varnothing$,

d) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $-B \subseteq -A$.

Berikut ini adalah beberapa kesamaan yang mengaitkan komplemen dengan irisan dan gabungan. Sifat ini dikenal dengan aturan DeMorgan

Teorema 1.4

Misalkan A, B subset dari sebuah himpunan semesta S , maka:

a) $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$.

b) $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$.

Dalam suatu kesempatan, kita akan berurusan dengan himpunan yang anggotanya juga adalah himpunan, dengan kata lain himpunan dari himpunan. Kita akan menggunakan nama keluarga dari himpunan atau famili dari himpunan bagi himpunan yang seperti ini. Himpunan kuasa dari suatu himpunan adalah salah satu contoh dari keluarga himpunan.

Definisi 1.4

Misalkan A adalah sebuah himpunan sebarang. Himpunan yang anggotanya adalah semua subhimpunan dari A disebut himpunan kuasa dari A, dan dinotasikan dengan P (A) , yaitu:

$$P(A) := \{B \mid B \subseteq A\} .$$

Contoh 1.2

Misalkan himpunan $A = \{a,b,c\}$. Himpunan kuasa dari A terdiri dari semua subhimpunan dari { abc , , } , dengan demikian

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Definisi 1.5

Misalkan AB, adalah himpunan. Produk Cartesius dari A B dan adalah himpunan: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A , b \in B\}$.

Definisi di atas mempunyai implikasi bahwa $A \times B = \emptyset$ jika dan hanya jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$. Perhatikan bahwa bila himpunan A memiliki n buah unsur dan himpunan B memiliki m buah unsur, maka $A \times B$ memiliki mn buah unsur.

Contoh 1.3

Misalkan $A = \{ -1, 0, 1 \}$ dan $B = \{ 0,2 \}$. Maka:

$$A \times B = \{ (-1, 0), (-1, 2), (0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\} .$$

sedangkan

$$B \times A = \{ (0, -1), (0,0), (0,1), (2, -1), (2,0), (2,1)\} .$$

Secara umum, pasangan terurut $A \times B$ dan $B \times A$ adalah tidak sama.

H. Fungsi (Pemetaan)

Pada dasarnya sebuah fungsi adalah sebuah relasi atau hubungan yang mempunyai sifat khusus.

1. Relasi

Sebuah relasi pada dasarnya adalah sebuah himpunan dari pasangan terurut.

Definisi 1.6. Relasi

Misalkan A, B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Sebuah relasi dari A ke B adalah sebuah subhimpunan dari $A \times B$.

Contoh 1.4

Misalkan A berisi nama-nama semua propinsi di Indonesia dan B = Z. Terhadap masing-masing propinsi di A dipasangkan bilangan bulat n yang menyatakan banyaknya penduduk propinsi yang bersangkutan pada tahun 2022. Maka $R = \{(a, n) \mid a \in A$ dan n adalah jumlah penduduk provinsi a pada tahun 2022$\}$ adalah subset dari $A \times Z$. Dengan demikian R menyatakan sebuah relasi dari A ke Z .

Definisi 1.7

Misalkan R sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Maka daerah asal dari R, dinotasikan dengan D (R) didefinisikan sebagai himpunan $\{ x \mid x \in A$ dan terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $(x, y) \in R \}$. Jangkauan atau bayangan dari R, dinotasikan dengan I (R) didefinisikan sebagai

himpunan $\{ y \mid y \in B$ dan terdapat sedemikian sehingga $(x, y) \in R \}$

Contoh 1.5

Misalkan $A = \{ 4,5,7,8,9\}$ dan $B = \{16,18,20,22\}$.

Definisikan $R \subseteq A \times B$ dengan, $R = \{ (4,16), (4,20), (5,20), (8,16), (9,18) \}$.

Maka R adalah relasi dari A ke B.

Perhatikan bahwa $(a, b) \in R$

jika dan hanya jika a membagi b, di mana $a \in A$ dan $b \in B$.

Perhatikan bahwa $D (R) = \{ 4,5,8,9 \}$ dan $I (R) = \{ 16,18,20 \}$.

Definisi 1.8

Misalkan R sebuah relasi biner pada himpunan A. Himpunan R disebut:

- refleksif jika untuk setiap $x \in A$, berlaku $x \sim x$,
- simetris jika untuk setiap $x, y \in A$, kondisi $y \sim x$ mengakibatkan $x \sim y$,
- transitif, jika untuk setiap $x, y, z \in A$, kondisi $x \sim y$ dan $y \sim z$ mengakibatkan $x \sim z$

Definisi 1.9

Sebuah relasi biner E pada himpunan A disebut relasi ekuivalen (pada A) bila E memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Contoh 1.6

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan

$E = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,3), (3,2)\}$.

Dapat ditunjukkan bahwa E adalah sebuah relasi ekuivalen pada A.

Definisi 1.10

Misalkan E sebuah relasi ekuivalen pada sebuah himpunan A

Untuk setiap $x \in A$, misalkan $[x]$ menyatakan himpunan

$[x] = \{ y \in A \mid y = x \}$.

Himpunan [x] disebut kelas ekuivalen (relatif terhadap E) dari x.

Teorema 1.5

Misalkan ~ sebuah relasi ekuivalen pada sebuah himpunan A.Maka :

i .untuk setiap $x \in A$, $[x] \neq \varnothing$,

ii. jika $y \in x$, maka $[x] = [y]$ dimana $x,y \in A$,

iii . $A = \cup_{x \in A} [x]$, yaitu A adalah gabungan dari semua kelas ekuivalen relatif terhadap relasi ~ ,

iv. untuk setiap $x, y \in A$, hanya berlaku salah satu dari hubungan berikut:

$[x] \cap [y] = \varnothing$ atau $[x] = [y]$.

2. Fungsi

Berikut ini adalah terminologi dan notasi tentang pemetaan.

Definisi 1.11. PEMETAAN (FUNGSI)

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Sebuah relasi f dari A ke B disebut pemetaan atau fungsi dari A ke B jika:

i. $D(f) = A$, dan

ii. untuk setiap $(x , y), (x ',y ') \in f$, kondisi $x = x'$ mengakibatkan $y = y'$.

Kita akan gunakan notasi

$$f: A \rightarrow B$$

untuk menyatakan sebuah pemetaan dari A ke B.

Kita akan tulis $f (a) = b$, atau

$$f : a \rightarrow b$$

untuk menyatakan bahwa pemetaan f membawa a ke b.

Secara operasional, definisi di atas menyatakan bahwa f adalah sebuah pemetaan dari A ke B bila untuk setiap $a = a' \in A$ berlaku $f (a) = f (a')$ ….. (*) Sebuah relasi yang memenuhi kondisi (*) disebut terdefinisi dengan baik, atau bernilai tunggal.

Definisi 1.12

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan-himpunan tak kosong.
Misalkan pula $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ adalah dua buah fungsi.
Komposisi dari f dan g ditulis f o g, adalah fungsi dari A ke C dengan definisi sebagai berikut: $g \circ f = \{(x, z) : x \in A, z \in C$, terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z\}$.
Sekarang misalkan $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ dan $(x, y) \in g \circ f$ yaitu $(g \circ f)(x) = z$. Berdasarkan definisi komposisi fungsi, terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga
$f(x) = y$ dan $g(y) = z$. Sekarang $z = g(y) = g(f(x))$.
Jadi, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Teorema 1.6

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ adalah pemetaan-pemetaan.
Maka:

1. $g \circ f : A \rightarrow C$ adalah sebuah pemetaan dari A ke C.
2. Jika f dan g adalah satu-satu, maka $g \circ f$ adalah satu-satu.
3. Jika f dan g adalah pemetaan-pemetaan yang pada, maka $g \circ f$ pemetaan pada.

Teorema 1.7

Misalkan A himpunan tak kosong dan $f : A \rightarrow A$pemetaan satu-satu. Maka $f^n : A \rightarrow A$ yaitu komposisi sebanyak n kali dari f adalah pemetaan satu-satu untuk setiap bilangan asli $n \in N$.

Teorema 1.8

Misalkan A adalah himpunan tak kosong yang berhingga. Jika $f : A \rightarrow A$ adalah satu-satu, maka f adalah pada.

Teorema 1.9

Misalkan $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$.

Maka: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
Yaitu komposisi fungsi adalah bersifat asosiatif.

Definisi 1.13
Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong dan $f : A \rightarrow B$ sebuah pemetaan.
1. Pemetaan f disebut invertibel-kiri jika terdapat pemetaan $g : B \rightarrow A$ sedemikian sehingga $g \circ f = i_A$, di mana $i_A : A \rightarrow A$ adalah pemetaan identitas $i_A(x)$ untuk setiap . $x \in A$
2. Pemetaan f disebut invertibel-kanan jika terdapat pemetaan $h : B \rightarrow A$ sedemikian sehingga $f \circ h = i_B$, di mana $i_B : B \rightarrow B$ adalah pemetaan identitas $i_B(x)$ untuk setiap $x \in B$.

Sebuah pemetaan $f : A \rightarrow B$ disebut invertibel jika f sekaligus invertibel-kiri dan invertibel-kanan.

Teorema 1.10
Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong, dan $f : A \rightarrow B$ sebuah pemetaan. Maka berlaku pernyataan berikut:
i. f adalah satu-satu jika dan hanya jika f invertibel-kiri.
ii. f adalah pada jika dan hanya jika f invertibel-kanan.
iii. f adalah satu-satu pada jika dan hanya jika f invertibel.

3. Fungsi Linear

a. Rumus Persamaan Linear Melalui 2 Titik

Misalkan 2 titik tersebut adalah titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2)
Maka persamaannya adalah:

$$\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$$

Contoh: Tentukan persamaan linear melalui titik:
1. A (1, 5) dan B (5, 2)

2. C (1, - 2) dan D (- 3, 4)

Jawab:

1. A (1, 5) dan B (5, 2) berarti, $x_1 = 1$, $y_1 = 5$ dan $x_2 = 5$, $y_2 = 2$

$$\frac{-5}{2-5} = \frac{x-1}{5-1}$$

Maka $\frac{y-5}{-3} = \frac{x-1}{4}$

4y -20 = -3x + 3. Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi:

1. 3x + 4y = 23
2. x + 4y – 23 = 0
3. $x = \frac{23}{3} - \frac{4}{3}y$
4. $y = \frac{23}{3} - \frac{3}{4}x$

2. C (1, -2) dan B (- 3, 4) berarti , $x_1 = 1$, $y_1 = -2$ dan $x_2 = -3$,

$y_2 = 4$ $\frac{y-(-2)}{4-(-2)} = \frac{x-1}{-3-1}$

Maka $\frac{y+2}{4+2} = \frac{x-1}{-4}$

$\frac{y+2}{6} = \frac{x-1}{-4}$ $\Rightarrow$ -4 y – 8 = 6x – 6

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi :

1. 6x + 4y = - 2
2. 6x + 4y + 2 = 0
3. $x = -\frac{2}{6} - \frac{4}{6}y$ atau $x = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}y$
4. $y = -\frac{2}{6} - \frac{6}{4}x$ atau $y = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2}x$

4. Rumus Persamaan Linear Melalui 1 Titik (x_1, y_1) dan diketahui Gradiennya (m)

$$y - y1 = m\ (x - x1)$$

Contoh: Tentukan persamaan linear jika diketahui :

a. Gradiennya 2/3 dan melalui titik P (1, - 5)

b. Gadiennya - ¾ dan melalui titik Q (-2 , 3)

Jawab:

1. Diketahui m = 2/3 dan $x_1 = 1$, $y_1 = -5$

   y – (- 5) = 2/3 (x – 1) ……… y + 5 = 2/3 (x – 1)

   3y + 15 = 2x – 2 Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi:

   1. 2x – 3y = 17
   2. 2x – 3y – 17 = 0
   3. $x = \frac{17}{2} - \frac{3}{2}y$
   4. $y = -\frac{17}{3} + \frac{2}{3}x$

2. Diketahui m = - ¾ dan $x_1 = -2$, $y_1 = 3$

   y – 3 = - ¾ (x – (-2)) ……… y – 3 = - ¾ (x + 2)

   4y – 12 = - 3x – 6 Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi:
   1. 3x + 4y = 6
   2. 3x + 4y = 6 = 0
   3. $x = \frac{6}{3} - \frac{4}{3}y$ atau $x = 2 - \frac{4}{3}y$
   4. $y = \frac{6}{4} - \frac{3}{4}x$ atau $y = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x$

5. Menggambar Persamaan Linear

Langkah-langkah yang diperlukan untuk menggambar pesamaan linear.

1. Tentukan titik potong garis dengan sumbu x dengan ketentuan y = 0
2. Tentukan titik potong garis denngan sumbu y dengan ketentuan x = 0
3. Jika Langkah 1 dan 2 diperoleh hasilnya 0 (nol) , Langkah selanjutnya ambil sembarang titik di sebelah kanan atau kiri.

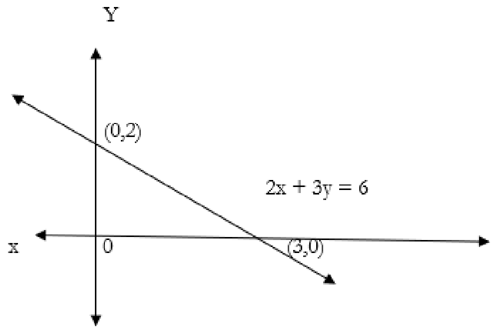
Contoh: gambarkan persamaan linear berikut :

1. $2x + 3y = 6$
2. $y = 3x + 6$
3. $y = 3x$
4. $y = 2/3\ x$

jawab:

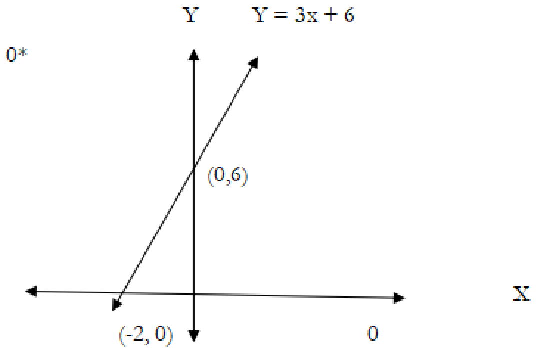
1. $2x + 3y = 6$

X	3	0
Y	0	2



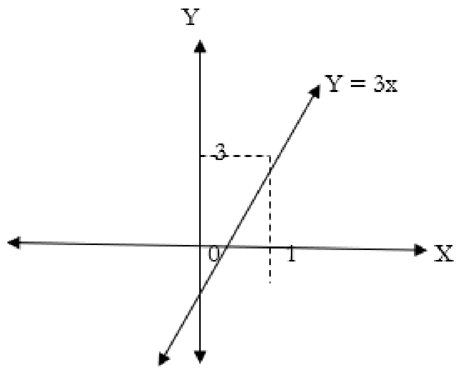
2. $y = 3x + 6$

X	-2	0
Y	0	6



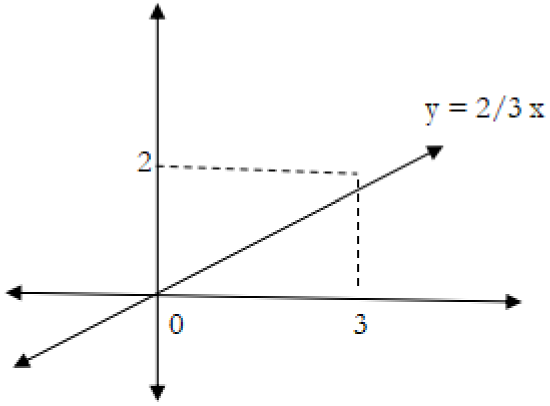
3. $y = 3X$

X	1
Y	3



4. $y = 2/3\ x$

X	3
Y	2



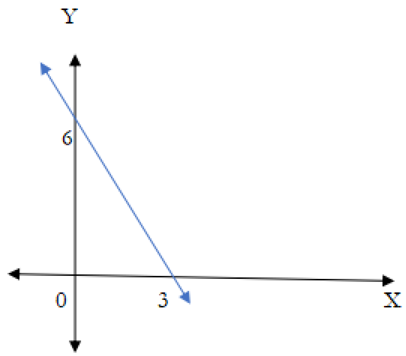
Membaca gambar Persamaan Linear

2 cara membaca gambar persamaan linear:

1. Pertukarkan sumbu koordinat kemudiaan kalikan bilangan yang diketahui
2. Menggunakan rumus

Contoh:

1. Tentukan persamaan linear grafik berikut ini.



Jawab :

Angka 6 pada sumbu y diubah menjadi 6x

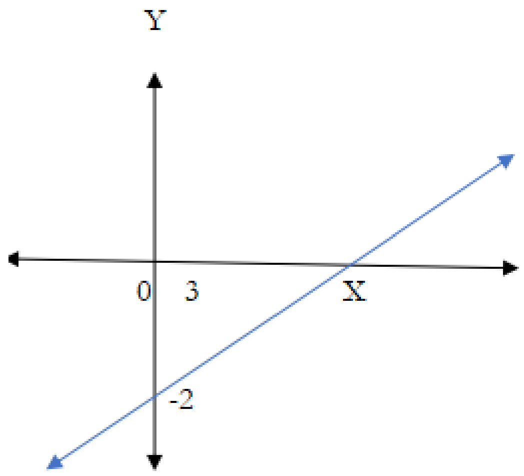
Angka 3 pada sumbu x diubah menjadi 3y

Kemudian di dapat persamaan linearnya :

$$6x + 3y = 6.3$$

$$6x + 3y = 18$$ …. Persamaan linear yang diminta.

2. Tentukan persaman linear grafik berikut ini.



Jawab :

Angka -2 pada sumbu y diubah menjadi -2x

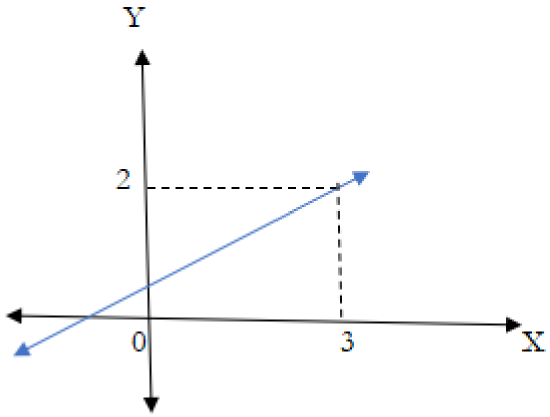
Angka 3 pada sumbu x diubah menjadi 3y

Kemudian di dapat persamaan linearnya :

$$-2x + 3y = -2.3$$

$$-2x + 3y = -6 \quad \text{.... Persamaan linear yang diminta.}$$

3. Tentukan persamaan linear grafik berikut ini.



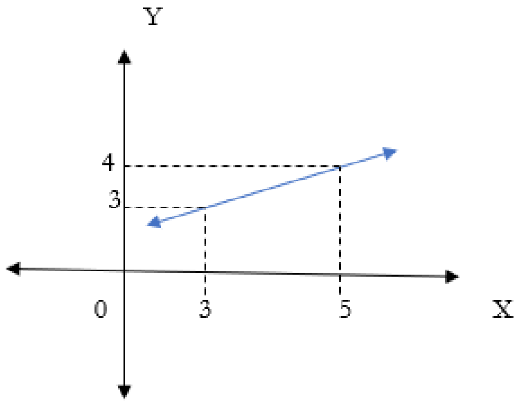
Jawab :

Perhatikan gambar melalui titik pangkal koordinat (0,0) ini berarti persamaan garis menggunakan rumus . y = mx

m = y/x ………   m = 2/3

y = 2/3 x maka didapat persamaan linear yang diminta : y = 2x

4. Tentukan persamaan linear grafik berikut ini.



Gambar di atas dapat diselesaikan menggunakan rumus :

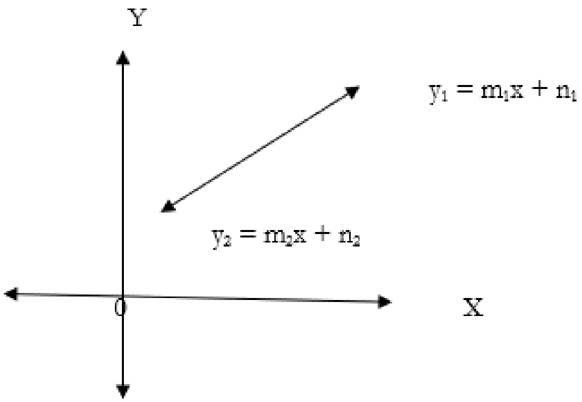
$$\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$$

$\frac{y-3}{4-3} = \frac{x-3}{5-3}$ $\frac{y-3}{1} = \frac{x-3}{2}$

2y – 6 = x – 3 Maka persamaan linear yang diminta :

x – 2y = - 3

Hubungan Dua Garis Lurus
Dua Buah Garis Berhimpit.

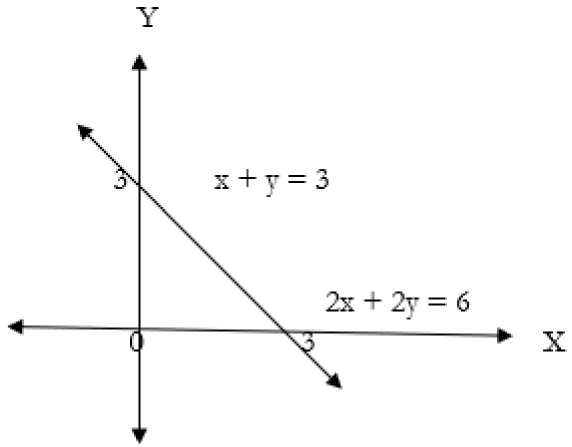


Dua buah garis berimpit apabila : $y_1 = ay_2$, $m_1 = am_2$, $n_1 = an_2$
Contoh :
Apakah dua buah garis berikut berhimpit ? gambarkan !
Garis 1 : $x + y = 3$
Garis 2 : $2x + 2y = 6$
Jawab :
$2x + 2y = 6$ jika disederhanakan akan diperoleh : $x + y = 3$
Persamaan garis 2 ini sama dengan persamaan garis 1.
Berarti dua buah garis di atas ***berhimpit***.

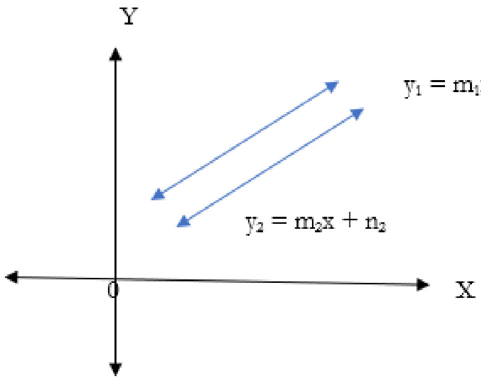
$x + y = 3$ $2x + 2y = 6$

X	3	0
Y	0	3

X	3	0
Y	0	3



Dua buah garis Sejajar.



Dua buah garis sejajar apabila : $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$

Contoh :

Apakah dua buah garis berikut sejajar ? gambarkan !

Garis 1 : $x + y = 3$

Garis 2 : $2x + 2y = 8$

Jawab :

$x + y = 3$ .... $y = -x + 3$ berarti $m_1 = -1$, $n_1 = 3$

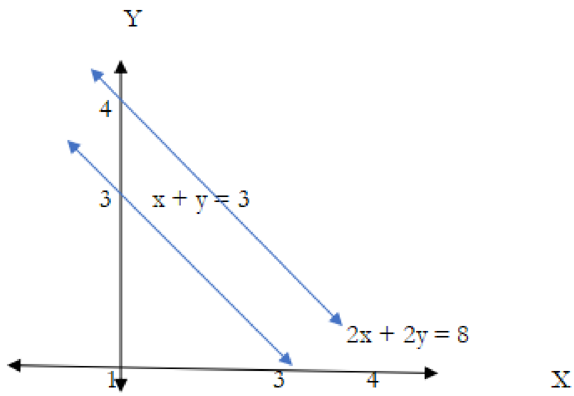
$2x + 2y = 8$ …….. $x + y = 4$ ……… $y = -x + 4$ berarti $m_2 = -1$, $n_2 = 4$

Berarti dua buah garis di atas ***sejajar.***

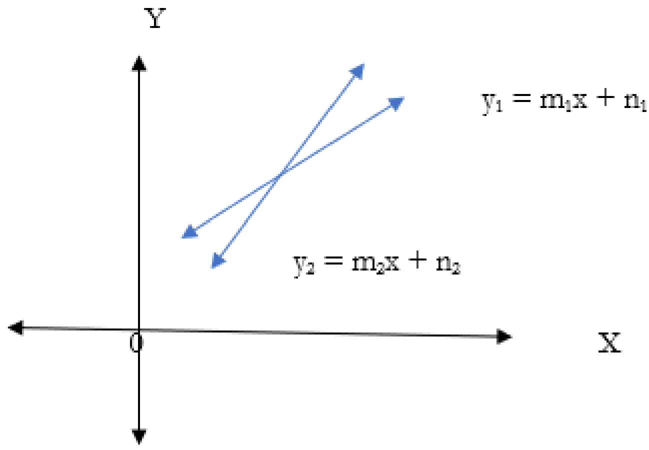
$x + y = 3$ $2x + 2y = 8$

X	3	0
Y	0	3

X	4	0
Y	0	4



Dua buah garis Berpotongan.



Dua buah garis berpotongan apabila : $m_1 \neq m_2$

Contoh :

Apakah dua buah garis berikut berpotongan ? gambarkan !

Garis 1 : x + y = 3

Garis 2 : 2x + 3y = 6

Jawab :

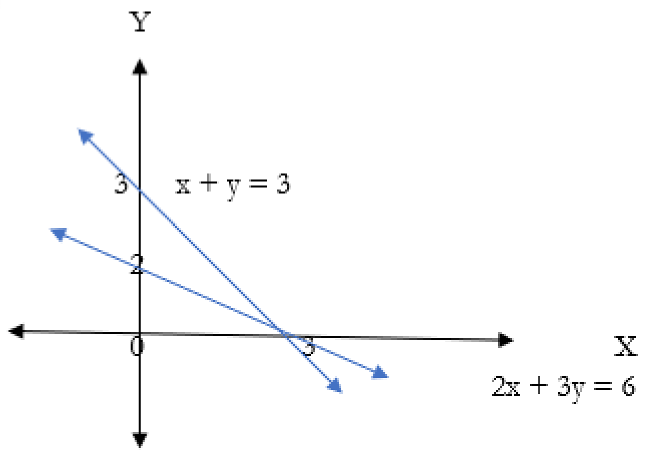
x + y = 3 .... y = -x + 3 berarti m_1 = -1

2x + 3y = 6 .... x + y = 4 .... y = - 2/3 x + 2 berarti m_2 = -2/3

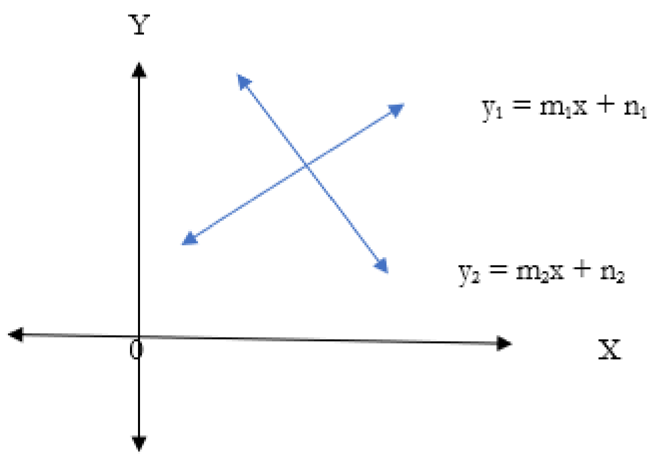
Berarti dua buah garis di atas ***berpotongan.***

x + y = 3 2x + 3y = 6

X	3	0
Y	0	3
X	3	0
Y	0	2



Dua buah garis Tegak Lurus.



Dua buah garis tegak lurus apabila : $m_1.m_2 = -1$

Contoh:

Apakah dua buah garis berikut berpotongan ? gambarkan !

Garis 1: $x + y = 3$

Garis 2: $-2x + 2y = 6$

Jawab:

$x + y = 3$ .... $y = -x + 3$ berarti $m_1 = -1$

$-2x + 2y = 6$ .... $-x + y = 3$ .... $y = x + 3$ berarti $m_2 = 1$

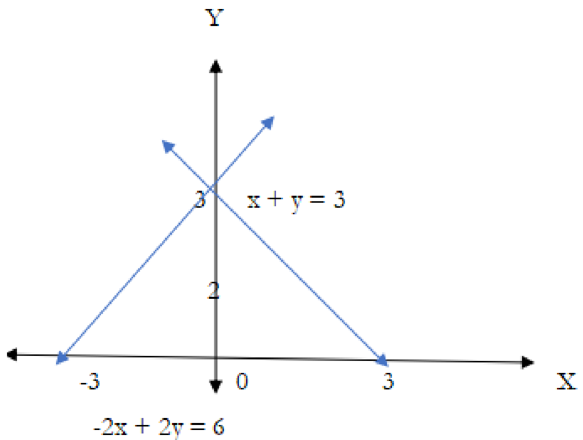
$m_1.m_2 = -1.1 = -1$

Berarti dua buah garis di atas ***Tegak Lurus .***

$x + y = 3$ $-2x + 2y = 6$

X	3	0
Y	0	3

X	-3	0
Y	0	3



I. Pencarian Nilai Variabel Dari Persamaan Linear.

Ada 5 cara menghitung nilai variable dari persaman linear.

1. Metode Eleminasi
2. Metode Substitusi
3. Metode Eleminasi dan Substitusi

Contoh:

Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi dari dua persamaan linear berikut :

2x + 3y = 8 dan x + y = 3

Jawab:

1. Metode Eleminasi

$$\begin{array}{llll} 2x + 3y = 8 \ldots\ldots(x1), & 2x + 3y = 8 & \\ x \;\; + y \;\;\; = 3 \ldots\ldots(x2), & \underline{2x + 2y = 6} & - \\ & \quad\quad y = 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2x + 3y = 8 \ldots\ldots(x1), & 2x + 3y = 8 & \\ x \;\; + y \;\;\; = 3 \ldots\ldots(x3), & \underline{3x + 3y = 9} & - \\ & \quad -x = -1 & \text{maka } x = 1 \end{array}$$

nilai x dan y yang memenuhi adalah x = 1 dan y = 2

2. Metode Substitusi

X + y = 3 ……… x = 3 – y

X = 3 – y disubstitusi ke persamaan : 2x + 3y = 8

didapat : 2 (3 – y) + 3y = 8

6 – 2y + 3y = 8

– 2y + 3y = 8 – 6

Y = 2

Y = 2 substitusi ke persamaan : x = 3 – y

X = 3 – 2 = 1.

nilai x dan y yang memenuhi adalah x = 1 dan y = 2

3. Metode Eleminasi dan Substitusi

$$\begin{array}{lll} 2x + 3y = 8 \ldots\ldots(x1), & 2x + 3y = 8 & \\ x \;\; + y \;\;\; = 3 \ldots\ldots(x2), & \underline{2x + 2y = 6} & - \\ & \quad\quad y = 2 & \end{array}$$

y = 2 substitusikan ke : x + y = 3

$$x + 2 = 3 \ldots\ldots\ldots \quad x = 1$$

nilai x dan y yang memenuhi adalah $x = 1$ dan $y = 2$

a. Fungsi Kuadrat

Bentuk Umum Persamaan Kuadrat :

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{atau} \quad y = a\ (x - x_1)^2 + y_1$$

Keterangan : (x_1, y_1) adalah titik puncak (x, y) adalah titik yang dilalui kurva

Ada 3 cara menghitung akar-akar persamaan Kuadrat :

1. Faktorisasi
2. Melengkapkan kuadrat Sempurna
3. Rumus ABC

Contoh: Tentukan Nilai Akar-Akar Persamaan Kuadrat Berikut Ini !

1. $x^2 - 9 = 0$
2. $2x^2 - 8 = 0$
3. $x^2 - 9x = 0$
4. $2x^2 - 7x = 0$
5. $x^2 - 9x + 8 = 0$
6. $2x^2 + 9x - 5 = 0$

Jawab:

1. $x^2 - 9 = 0$

a. Faktorisasi

$x^2 - 9 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (x + 3)(x - 3) = 0$

$x + 3 = 0$ dan $x - 3 = 0$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : - 3 dan 3

Ingat Rumus : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 0$

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ …………… $x = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = 3$ dan $x_2 = -3$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : - 3 dan 3

c. Rumus ABC

$x^2 - 9 = 0$, a = 1 , b = 0 , c = - 9

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1.2} = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{0 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{0+6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{0-6}{2} = -3$$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : - 3 dan 3

2. $\mathbf{2x^2 - 8 = 0}$

a. Faktorisasi

$2x^2 - 8 = 0$ disederhanakan semua dibagi 2

$x^2 - 4 = 0$ ………………. $(x + 2)(x - 2) = 0$

$x + 2 = 0$ dan $x - 2 = 0$

$x_1 = -2$ dan $x_2 = 2$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : - 2 dan 2

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

$2x^2 - 8 = 0$ ………… $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2$ dan $x_2 = -2$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : - 2 dan 2

c. Rumus ABC

$2x^2 - 8 = 0$, a = 2 , b = 0 , c = - 8

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1.2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4.2.(-8)}}{2.2}$$

$x_{1.2} = \frac{0 \pm \sqrt{64}}{4}$ ………………… $x_{1.2} = \frac{\pm 8}{4}$

$x_1 = 8/4 = 2$ dan $x_2 = -8/4 = -2$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : - 2 dan 2

3. $x^2 - 9x = 0$

a. Faktorisasi

$x^2 - 9x = 0$ …………… $x(x - 9) = 0$

$x = 0$ dan $x - 9 = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = 9$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah: 0 dan 9

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

$x^2 - 9x = 0$ ………… $\left(x - \left(\frac{9}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$\left(x - \frac{9}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{81}{4}}$ ………. $x - 9/2 = \pm 9/2$

$X = \pm 9/2 + 9/2$

$x_1 = 9/2 + 9/2 = 18/2 = 9$ dan $x_2 = -9/2 + 9/2 = 0$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah: 0 dan 9

c. Rumus ABC

$x^2 - 9x = 0$, a = 1, b= - 9, c = 0

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1.2} = \frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4.1.0}}{2.1}$

$x_{1.2} = \frac{9\pm\sqrt{81}}{2}$

$x_1 = (9 + 9)/2 = 18/2 = 9$ dan $x_2 = (9 - 9)/2 = 0$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah: 0 dan 9

4. **$2x^2 - 7x = 0$**

a. Faktorisasi

$2x^2 - 7x = 0$ .... $x\,(2x - 7) = 0$

$x = 0$ dan $2x - 7 = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = 7/2$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah: 0 dan 7/2

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

$2x^2 - 7x = 0$ .... $2\,(x - 7/4\,)^2 = 2.(7/4)^2$

$(x - 7/4\,)^2 = (7/4)^2$

$x - 7/4 = \pm 7/4$

$x = \pm 7/4 + 7/4$

$x1 = 7/4 + 7/4 = 14/4 = 7/2$

$x2 = -\,7/4 + 7/4 = 0/4 = 0$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : 0 dan 7/2

c. Rumus ABC

$2x^2 - 7x = 0$, $a = 2$, $b = -7$, $c = 0$

$x_{1.2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1.2} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4.2.0}}{2.2}$

$x_{1.2} = \frac{7\pm\sqrt{49}}{4}$

$x_1 = (\,7 + 7\,)\,/\,4 = 14/4 = 7/2$ dan $x_2 = (\,7 - 7\,)/4 = 0/4 = 0$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : 0 dan 7/2

5. $\mathbf{x^2 - 9x + 8 = 0}$

a. Faktorisasi

$x^2 - 9x + 8 = 0$ .... $(-1) \times (-8) = 8$

$(-1) + (-8) = -9$

$(x - 1)(x - 8) = 0$

$x - 1 = 0$ dan $x - 8 = 0$

$x_1 = 1$ $x_2 = 8$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : 1 dan 8

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

$x^2 - 9x + 8 = 0$ .... $(x - 9/2)^2 = -8 + (9/2)^2$

$(x - 9/2)^2 = -32/4 + 81/4$

$(x - 9/2)^2 = 49/4$

$x - 9/2 = \pm 7/2$

$x = \pm 7/2 + 9/2$

$x_1 = 7/2 + 9/2 = 8$ dan $x_2 = -7/2 + 9/2 = 2/2 = 1$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : 1 dan 8

c. Rumus ABC

$x^2 - 9x + 8 = 0$, $a = 1$, $b = -9$, $c = 8$

$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1.2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.8}}{2.1}$

$x_{1.2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_1 = (9 + 7)/2 = 16/2 = 8$ dan $x_2 = (9 - 7)/2 = 2/2 = 1$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : 1 dan 8

6. **$2x^2 + 9x - 5 = 0$**

dikalikan

a. Faktorisasi

$2x^2 + 9x - 5 = 0$ ……………………….$2x^2$ $+ 9x$ $- 5$

$= 0$

10 x (- 1) = - 10

10 + (- 1) = 9

(2x – 1) (x + 5) = 0

$2x - 1 = 0$ dan $x + 5 = 0$

$2x = 1$ $x_2 = -5$

$x_1 = ½$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : ½ dan - 5

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

$2x^2 + 9x - 5 = 0$ ……………… $2(x + 9/4)^2 = 5 + 2.(9/4)^2$

$2(x + 9/4)^2 = 5 + 2.(81/16)$

$2(x + 9/4)^2 = 5 + (81/8)$

$2(x + 9/4)^2 = (40/8) + (81/8)$

$2(x + 9/4)^2 = 121/8$

$(x + 9/4)^2 = 121/16$

$X + 9/4 = \pm 11/4$

$x = \pm 11/4 - 9/4$

$x_1 = 11/4 - 9/4 = 2/4 = ½$ dan $x_2 = -11/4 - 9/4 = -20/4 = -5$

Nilai akar-akar Persamaan Kuadrat adalah : ½ dan - 5

c. Rumus ABC

$2x^2 + 9x - 5 = 0$, $a = 2$, $b = 9$, $c = -5$

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1.2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.2.(-5)}}{2.2}$$

$$x_{1.2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$x_1 = (-9 + 11)/4 = 2/4 = ½$ dan $x_2 = (-9 - 11)/4 = -20/4 = -5$

J. Menggambar Fungsi Kuadrat

Langkah-langkah menggambar fungsi kuadrat :

I. Menentukan nilai a, b, dan c dari persamaan fungsi kuadrat

II. Menentukan arah grafik fungsi
Menentukan arah grafik fungsi dapat dilihat dari nilai a,
jika $a > 0$ maka grafik akan terbuka ke atas,
dan jika $a < 0$ maka grafik akan terbuka ke bawah.

III. Menentukan titik potong pada sumbu x dengan syarat y=0 atau fx=0 sehingga $ax^2 + bx + c = 0$, yang dimaksud dengan titik potong sumbu x adalah titik yang terletak pada sumbu x.
Menentukan titik potong dapat dilakukan dengan cara memfaktorkan fungsi kuadrat sehingga terdapat dua titik potong pada sumbu x.

IV. Menentukan titik potong pada sumbu y dengan syarat x=0. Dengan cara mensubtitusikan nilai x=0 pada rumus fungsi sehingga terdapat satu titik potong pada sumbu y

V. Menentukan titik puncak (x_p, y_p) , untuk menentukan titik puncak langkah pertama yang harus dilakukan yaitu:
- Mencari sumbu simetri sebagai x_p dengan rumus:
  Sumbu simteri = - b/2a
  Menentukan yp menggunakan rumus : D/ -4a (ingat: $D = b^2 - 4ac$)

- Meletakkan dan menghubungkan titik-titik koordinat yang diperoleh pada bidang koordinat kartesius

Contoh :

1. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2 – 4x – 5$

Jawab:

Langkah I: Menentukan nilai a, b, dan c dari persamaan fungsi kuadrat $f(x)= x^2 - 4x – 5$

maka diperoleh $a = 1$, $b = - 4$, $c = - 5$

Langkah II; Menentukan arah grafik fungsi $f(x)= x^2 - 4x - 5$.

Nilai $a = 1$ artinya, jika $a > 0$ maka grafik akan terbuka ke atas

langkah III: Menentukan titik potong dengan sumbu x , $y = 0$.

$f(x)= x^2 - 4x – 5$

$x^2 - 4x – 5 = 0$ $(x – 5)(x + 1) = 0$ .... $x_1 = 5$ dan $x_2 = -1$

titik potong dengan sumbu x adalah : (- 1, 0) dan (5, 0)

Langkah IV: Menentukan titik potong dengan sumbu y, $x = 0$.

$f(x)= x^2 - 4x – 5$

$f(0)= 0^2 - 4.0 – 5 = - 5$

titik potong dengan sumbu y adalah : (0, - 5)

Langkah V : Menentukan titik puncak (x_p, y_p)

Sumbu Simetri = $- b/ 2a = - (- 4)/2.1 = 4/2 = 2$

Titik Puncak : $y_p = (b^2 – 4.a.c)/- 4a$

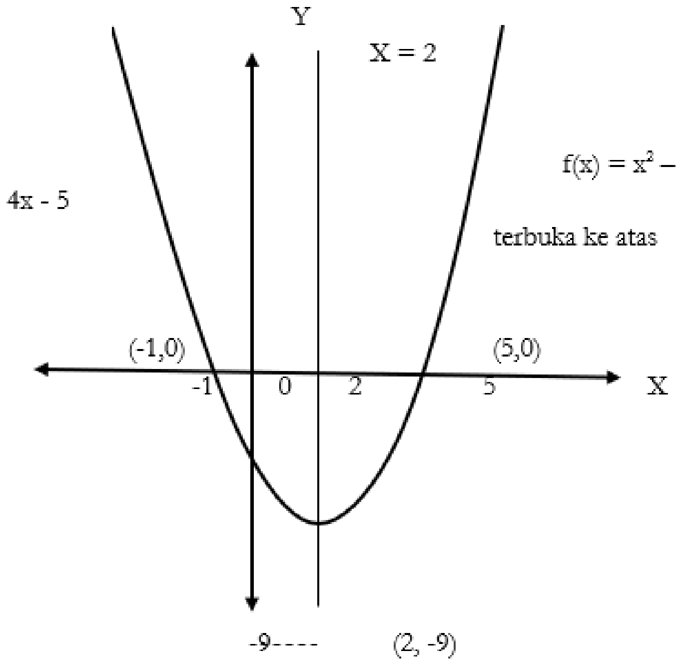
$= (4^2 – 4.1.(- 5))/- 4.1$

$= (16 + 20)/- 4$

$= 36/- 4 = - 9$.

Maka titik puncak dari grafik fungsi kuadrat adalah (2, - 9).

Langkah VI : Meletakkan dan menghubungkan titik-titik koordinat yang diperoleh pada bidang kartesius.



2. Gambarkan grafik fungsi f (x) =- x^2 + 6x – 5

Jawab:

Langkah I: Menentukan nilai a, b, dan c dari persamaan fungsi kuadrat f(x)= - x^2 + 6x – 5

maka diperoleh a = -1, b = 6 , c = - 5

Langkah II; Menentukan arah grafik fungsi f(x)= - x^2 + 6x – 5 .

Nilai a = -1 artinya, jika a < 0 maka grafik akan terbuka ke bawah

langkah III: Menentukan titik potong dengan sumbu x , y = 0.

f(x)= - x^2 + 6x – 5

x^2 - 4x – 5 = 0 (x – 5)(x - 1) = 0 .... $x_1 = 5$ dan $x_2 = 1$

titik potong dengan sumbu x adalah : (1, 0) dan (5, 0)

Langkah IV: Menentukan titik potong dengan sumbu y, x = 0.

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$

$f(0) = 0^2 + 6.0 - 5 = -5$

titik potong dengan sumbu y adalah : (0, - 5)

Langkah V : Menentukan titik puncak (x_p, y_p)

Sumbu Simetri = - b/ 2a = - 6/2.(-1) = -6/-2 = 3

Titik Puncak : $y_p = (b^2 - 4.a.c)/- 4a$

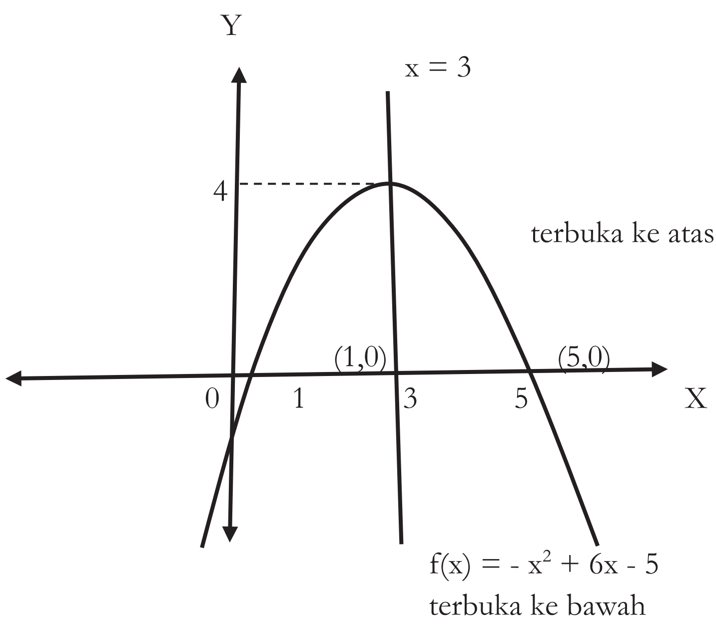
$= (6^2 - 4.(-1).(-5))/- 4.(-1)$

$= (36 - 20)/ 4$

$= 16/4 = 4.$

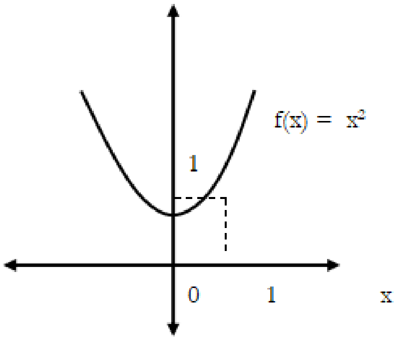
Maka titik puncak dari grafik fungsi kuadrat adalah (3, 4).

Langkah VI : Meletakkan dan menghubungkan titik-titik koordinat yang diperoleh pada bidang kartesius.

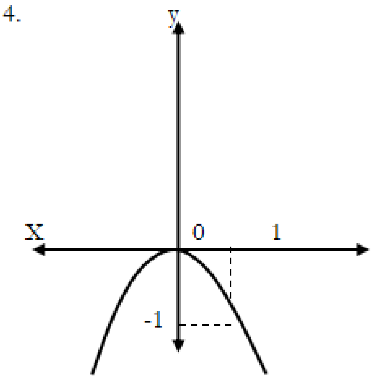


Model-model gambar grafik fungsi kuadrat yang lain.

3.

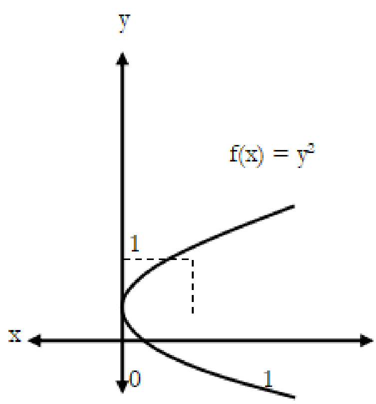


4.

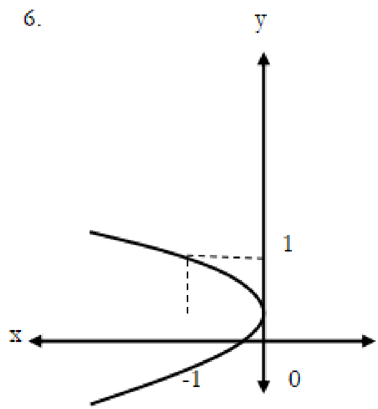


$f(x) = - x^2$

5

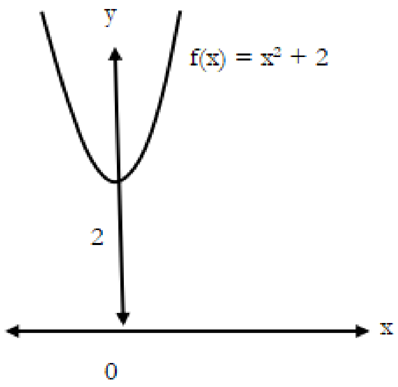


6.

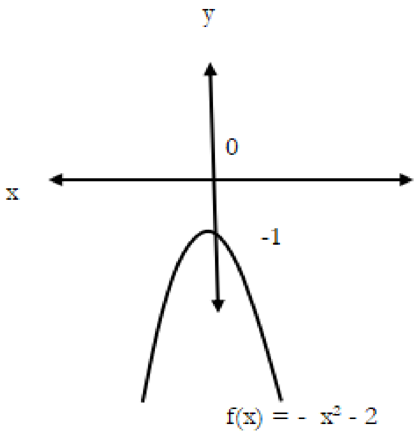


$f(x) = - y^2$

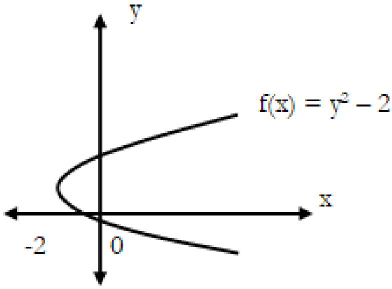
7.



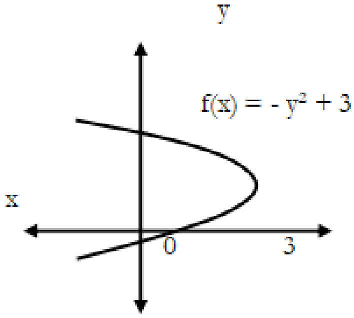
8.



9

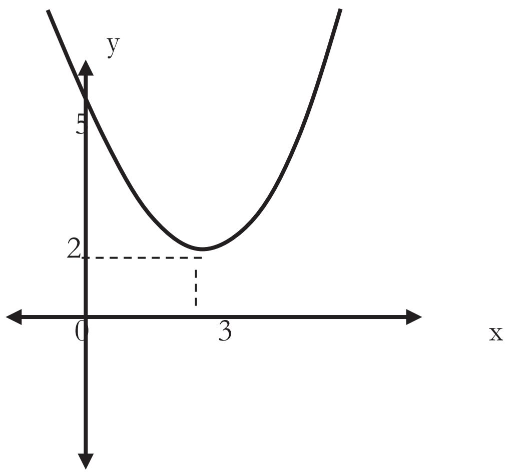


10.



0 Cara Membaca Menggambar Fungsi Kuadrat

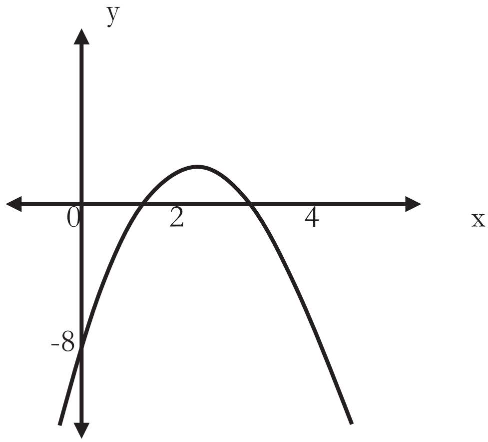
Contoh : 1. Tentukan fungsi kuadrat dari gambar berikut :



Jawab :

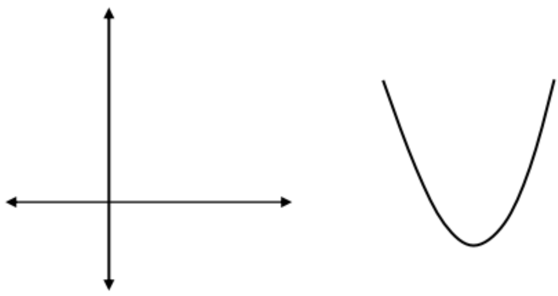
$$y = a(x - x_1)^2 + y_1$$
$$(3,\ 2) \quad x_1 = 3 \quad dan \quad y_1 = 2$$
$$y = a\ (x - 3)^2 + 2$$
$$melalui\ (0,\ 5) \quad , x = 0 \quad dan \quad y = 5$$
$$5 = a\ (0 - 3)^2 + 2$$
$$5 = 9a + 2$$
$$a = \frac{1}{3}\ jadi\ PK: y = \frac{1}{3(x - 3)^2} + 2$$
$$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$$

Contoh : 2. Tentukan fungsi kuadrat dari gambar berikut :



Jawab :

$$
\begin{aligned}
&melalui\ (2,\ 0) \Leftrightarrow \quad y = ax^2 + bx + c \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = 4a + 2b + c \\
&melalui\ (4,\ 0) \Leftrightarrow \quad 0 = 16a + 4b + c \\
&melalui\ (0,\ -8) \Leftrightarrow \quad -8 = c \\
&Dengan\ menggunakan\ metode \\
&ele\min a si\ dan\ substitusi\ didapat: \\
&c = -8, \quad a = -1, \quad b = 6 \\
&PK: y = -x^2 + 6x - 8 = 0
\end{aligned}
$$



MATERI III

Aplikasi Fungsi dalam Ilmu Ekonomi

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut :

1. Mahasiswa mampu menerapkan penggunaan fungsi dalam ilmu ekonomi.
2. Mahasiswa dapat memahami fungsi permintaan dan dapat membentuk model fungsi permintaan , serta menggambarkan fungsi permintaan.
3. Mahasiswa dapat memahami fungsi penawaran dan dapat membentuk model fungsi penawaran serta menggambarkan grafik fungsi penawaran
4. Mahasiswa dapat membedakan dan mendiskripsikan model fungsi permintaan dan fungsi penawaran
5. Mahasiswa dapat memahami keseimbangan pasar serta dapat memperlihatkannya dalam grafik
6. Mahasiswa dapat menentukan keseimbangan pasar sebelum dan sesudah adanya pajak, Besar pajak yang dinikmati konsumen, pajak yang dinikmati produsen, dan total pajak yang disetor pada pemerintah serta memperlihatkan dalam satu grafik
7. Mahasiswa mampu menganalisis pulang pokok BEP (titik impas = *break event point*), dengan memahami fungsi Total Pendapatan TR, dan Total Biaya TC, dan memperlihatkannya dalam grafik.
8. Mahasiswa dapat memahami fungsi konsumsi dan tabungan. Sehingga mahasiswa dapat menentukan keseimbangan pendapatan Nasional dan memperlihatkannya dalam grafik

B. Materi Pembelajaran

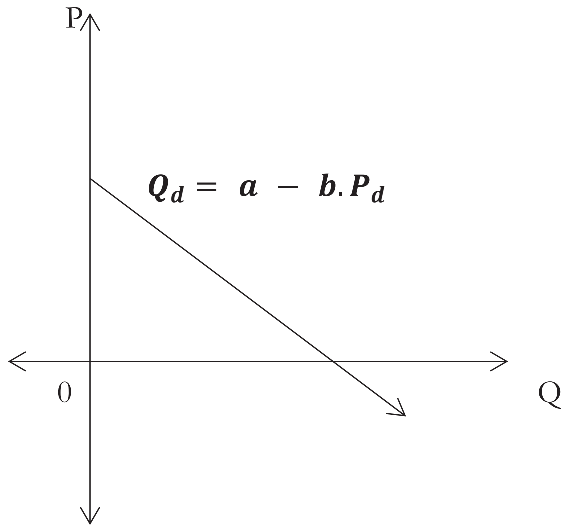
Setelah mempelajari bab ini, Anda akan memahami :

1. Penggunaan fungsi dalam ilmu ekonomi
2. Fungsi permintaan dan dapat membentuk model fungsi permintaan serta menggambarkan fungsi permintaan
3. Fungsi penawaran dan dapat membentuk model fungsi penawaran serta menggambarkan grafik fungsi penawaran
4. Perbedaan dan pendiskripsikan model fungsi permintaan dan fungsi penawaran
5. Keseimbangan pasar serta dapat memperlihatkannya dalam grafik
6. Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah adanya pajak, Besar pajak yang dinikmati konsumen, pajak yang dinikmati produsen, dan total pajak yang disetor pada pemerintah serta memperlihatkan dalam satu grafik
7. Analisis pulang pokok BEP (titik impas = *break event point*), dengan memahami fungsi Total Pendapatan TR, dan Total Biaya TC, dan memperlihatkannya dalam grafik.
8. Fungsi konsumsi dan tabungan. Sehingga mahasiswa dapat menentukan keseimbangan pendapatan Nasional dan memperlihatkannya dalam grafik

1. Fungsi Demand Dan Fungsi Supply

1.1. Fungsi Demand

Fungsi Permintaan adalah persamaan yang menunjukkan hubungan antara jumlah suatu barang yang diminta dengan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Fungsi permintaan adalah suatu kajian matematis yang digunakan untuk menganalisa perilaku konsumen dan harga. Fungsi permintaan mengikuti hukum permintaan yaitu apabila harga suatu barang naik maka permintaan akan barang tersebut juga menurun dan sebaliknya apabila harga barang turun maka permintaan akan barang tersebut meningkat. jadi hubungan antara harga dan jumlah barang yang diminta memiliki hubungan yang terbalik, sehingga gradien dari fungsi permintaan (b) akan selalu negatif



Dimana:

a dan b = adalah konstanta, dimana b harus bernilai negatif
b = ΔQd / ΔPd
Pd = adalah harga barang per unit yang diminta
Qd = adalah banyaknya unit barang yang diminta
Syarat, P $\geq$ 0, Q $\geq$ 0, serta dPd / dQ < 0

Faktor-faktor yang mempengaruhi fungsi *demand* (permintaan) dalam ilmu ekonomi:

1. **Harga Barang itu Sendiri (Price of the Good)**

- **Hubungan negatif**: Semakin tinggi harga suatu barang, maka jumlah yang diminta akan semakin sedikit, dan sebaliknya.
- Dasar hukum permintaan: *Ceteris paribus*, jika harga naik → jumlah diminta turun.

Contoh: Jika harga beras naik dari Rp10.000 menjadi Rp15.000 per kg, maka konsumen mungkin akan membeli lebih sedikit atau beralih ke sumber karbohidrat lain seperti jagung.

2. **Pendapatan Konsumen (Income of Consumers)**
   - Untuk barang normal: Pendapatan naik → permintaan naik.
   - Untuk barang inferior: Pendapatan naik → permintaan turun.

Contoh: Jika penghasilan seseorang meningkat, ia mungkin akan mengganti konsumsi mie instan dengan makanan yang lebih sehat.

3. **Harga Barang Substitusi dan Komplementer**
   - Barang substitusi: Barang pengganti.
     - Jika harga teh naik → permintaan kopi bisa naik.
   - Barang komplementer: Barang pelengkap.
     - Jika harga mobil turun → permintaan bahan bakar bisa naik.

4. **Selera atau Preferensi Konsumen (Tastes and Preferences)**
   - Selera konsumen sangat memengaruhi permintaan.
   - Dipengaruhi oleh tren, budaya, iklan, gaya hidup, dan sosial media.

Contoh: Jika tren hidup sehat meningkat, permintaan terhadap makanan organik juga meningkat.

5. **Ekspektasi Harga di Masa Depan (Expectations of Future Prices)**
   - Jika konsumen memperkirakan harga akan naik, mereka cenderung membeli lebih banyak sekarang.
   - Jika mereka yakin harga akan turun, permintaan saat ini bisa turun.

Contoh: Jika dirumorkan harga properti akan naik tahun depan, permintaan rumah bisa naik sekarang.

6. **Jumlah Penduduk dan Komposisi Demografis**

- Semakin banyak penduduk → permintaan agregat meningkat.
- Struktur usia, gender, dan lokasi geografis juga berpengaruh.

Contoh: Permintaan susu formula akan tinggi di daerah dengan banyak bayi.

7. **Distribusi Pendapatan**

- Jika distribusi pendapatan lebih merata, kelas menengah bertambah → permintaan barang konsumsi meningkat.

Contoh: Negara dengan distribusi pendapatan yang adil cenderung punya permintaan yang stabil terhadap barang kebutuhan pokok dan sekunder.

8. **Kebijakan Pemerintah**

- Subsidi, pajak, dan regulasi dapat memengaruhi harga dan ketersediaan barang.

Contoh: Subsidi pupuk bisa menurunkan harga pangan → permintaan pangan meningkat.

9. **Kondisi Ekonomi Secara Umum**

- Inflasi, resesi, pertumbuhan ekonomi memengaruhi daya beli konsumen.

Contoh: Saat resesi, permintaan barang mewah cenderung menurun.

10. **Faktor Musiman**

- Beberapa barang atau jasa memiliki permintaan musiman.

Contoh: Permintaan jas hujan naik di musim hujan.

Faktor-Faktor Kegagalan Fungsi Demand Dan Solusinya

1. **Informasi yang Tidak Sempurna**

- Masalah: Konsumen tidak memiliki informasi yang cukup tentang harga, kualitas, atau manfaat produk.
- Akibat: Permintaan menjadi tidak rasional, konsumen bisa membeli barang yang tidak sesuai kebutuhan atau terlalu mahal.

Solusi:

- Edukasi konsumen.
- Transparansi harga dan spesifikasi barang.
- Regulasi pelabelan produk.

2. Distorsi Harga oleh Pemerintah atau Monopoli

- Masalah: Subsidi berlebihan, pajak tinggi, atau praktik monopoli menyebabkan harga tidak mencerminkan nilai pasar.
- Akibat: Permintaan menjadi terlalu tinggi (overdemand) atau terlalu rendah (underdemand).

Solusi:

- Kebijakan anti-monopoli.
- Penyesuaian subsidi dan pajak secara proporsional.
- Pasar yang lebih kompetitif.

3. Ketergantungan Emosional dan Impulsif

- Masalah: Konsumen membeli berdasarkan dorongan emosional, bukan pertimbangan rasional.
- Akibat: Permintaan tidak mencerminkan kebutuhan sebenarnya.

Solusi:

- Promosi konsumsi bijak.
- Pendidikan literasi keuangan.
- Pengaturan iklan yang menyesatkan.

4. Perubahan Selera yang Mendadak atau Tidak Terkontrol

- Masalah: Trend atau gaya hidup tertentu mendorong lonjakan permintaan yang tidak stabil.
- Akibat: Pasar menjadi fluktuatif, permintaan tidak bisa diprediksi.

Solusi:

- Diversifikasi produk.
- Manajemen risiko pada rantai pasokan.
- Analisis pasar secara berkala.

5. Ketimpangan Distribusi Pendapatan

- Masalah: Sebagian besar pendapatan terkonsentrasi di kelompok kecil.
- Akibat: Kelompok miskin memiliki daya beli rendah → fungsi permintaan tidak optimal.

Solusi:

- Kebijakan redistribusi (misalnya pajak progresif).
- Pemberdayaan ekonomi masyarakat menengah ke bawah.
- Program bantuan tunai bersyarat.

6. Ketidakpastian Ekonomi atau Politik

- **Masalah**: Ketidakstabilan ekonomi dan politik menyebabkan konsumen menunda konsumsi.
- **Akibat**: Permintaan menurun walaupun harga rendah.

Solusi:

- Meningkatkan stabilitas politik dan hukum.
- Menjaga inflasi dan nilai tukar tetap stabil.
- Memberi insentif konsumsi saat resesi.

7. **Krisis Keuangan dan Tingginya Tingkat Pengangguran**

- **Masalah**: Pendapatan menurun secara drastis, daya beli jatuh.
- **Akibat**: Fungsi permintaan lumpuh, bahkan untuk barang kebutuhan pokok.

Solusi:

- Program stimulus ekonomi.
- Pelatihan kerja dan penciptaan lapangan kerja.
- Program jaring pengaman sosial.

8. **Permintaan Palsu atau Spekulatif**

- Masalah: Permintaan didorong oleh spekulasi, bukan kebutuhan nyata (misalnya penimbunan saat krisis).
- Akibat: Fungsi permintaan tidak stabil dan merugikan pasar.

Solusi:

- Pengawasan dan penegakan hukum terhadap spekulan.

- Kebijakan distribusi barang strategis.
- Larangan penimbunan dan pembelian dalam jumlah besar oleh individu.

9. **Kurangnya Akses ke Pasar atau Infrastruktur**

- **Masalah**: Konsumen tidak dapat menjangkau produk karena keterbatasan fisik atau teknologi.
- **Akibat**: Permintaan tidak terealisasi meski ada kebutuhan.

Solusi**:**

- Pembangunan infrastruktur distribusi dan digital.
- Penetrasi pasar ke daerah terpencil.
- Dukungan logistik untuk UMKM.

10. **Ketergantungan terhadap Barang Impor**

- Masalah: Permintaan terhadap produk impor rentan terhadap fluktuasi kurs dan pasokan global.
- Akibat: Fungsi permintaan domestik menjadi tidak stabil.

Solusi:

- Substitusi impor dengan produksi dalam negeri.
- Diversifikasi sumber impor.
- Kebijakan proteksi industri strategis.

Contoh 1:

Pada saat harga Jeruk Rp. 5.000 perKg permintaan akan jeruk tersebut sebanyak 1000Kg, tetapi pada saat harga jeruk meningkat menjadi Rp. 7.000 Per Kg permintaan akan jeruk menurun menjadi 600Kg, buatlah fungsi permntaannya !

Jawab:

P1 = Rp. 5.000 Q1 = 1000 Kg

P2 = Rp. 7.000 Q2 = 600 Kg

untuk menentukan fungsi permintaannya maka digunakan rumus persamaan garis melalui dua titik, yakni :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

dengan mengganti x = Q dan y = P maka didapat,

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}$$

$$\frac{P-\quad 5000}{7000-5000} = \frac{Q-1000}{600-1000} \Longleftrightarrow \frac{P-5000}{2000} = \frac{Q-1000}{-400}$$

(P – 5000).(-400) = 2000.(Q – 1000)

-400P + 2.000.000 = 2000Q – 2.000.000

2.000.000 + 2.000.000 – 400P = 2000Q

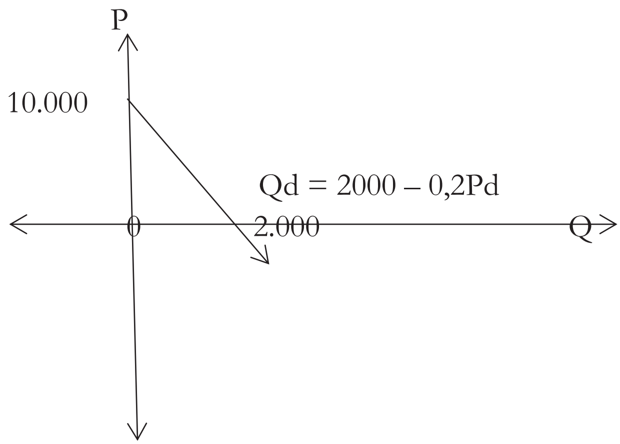
2000Q = 4.000.000 – 400P

Q = 2.000 – 0,2P

Jadi Dari kasus di atas diperoleh fungsi permintan

Qd = 2000 - 0,2Pd

Grafik fungsinya :



Contoh 2 :

Permintaan suatu barang sebanyak 500 buah pada saat harganya 40.000. Apabila setiap kenaikan harga sebesar 1.250 akan menyebabkan jumlah permintaan mengalami penurunan sebesar 250, bagaimana fungsi permintaannya dan gambarkan fungsi permintaannya pada grafik kartesius

Jawab:

P1 = 40.000 , Q1 = 500

$\Delta P = 1.250 \quad , \quad \Delta Q = - 250$

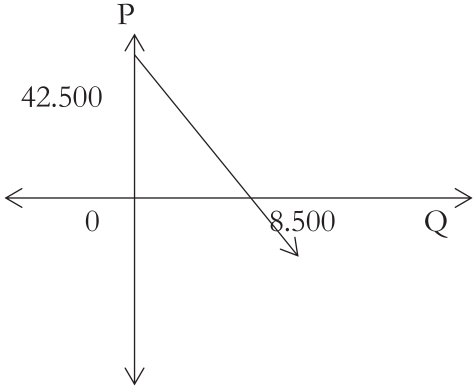
$P – P1 = m (Q – Q1)$

$m = \Delta P / \Delta Q = 1.250/ - 250 = - 5$

$P – 40.000 = - 5 (Q – 500)$

$P = 42.500 – 5Q$

Grafik fungsinya :



Contoh 3 :

Diketahui Fungsi Permintaan suatu barang mempunyai persamaan sbb :

$P = - 2Q + 10$

Tentukan :

a. Berapakah harganya bila jumlah yang terjual 3 unit
b. Berapakah kuantitasnya bila harga Rp 2
c. Berapa harga tertinggi sehingga seorangpun tak mampu membeli barang tersebut
d. Berapa kuantitas yg diminta bila brg tersebut berupa brg bebas (free goods).
e. Gambarkan grafiknya

Jawab :

a. $Q = 3$ disubstitusi ke $P = - 2Q + 10$

$$P = - 2(3) + 10 = 4$$

Jika terjual 3 unit maka harga yang diminta sebesar Rp 4

b. P = 2 disubstitusikan ke P = - 2Q + 10

2 = - 2Q + 10 , Q = 4

Apabila harga Rp 2 maka banyaknya barang yang terjual 4 unit.

c. Tidak seorangpun mampu membeli barang jika barangnya tidak ada (Q = 0).

Q = 0 disubstitusikan ke P = - 2Q + 10

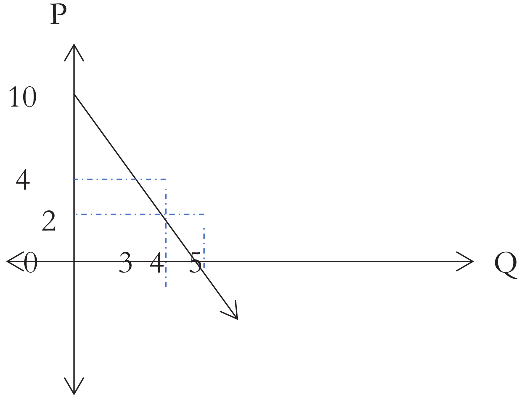
P = - 2(0) + 10 , maka P = 10

d. Barang bebas berarti P = 0

P = 0 disubstitusikan ke P = - 2Q + 10

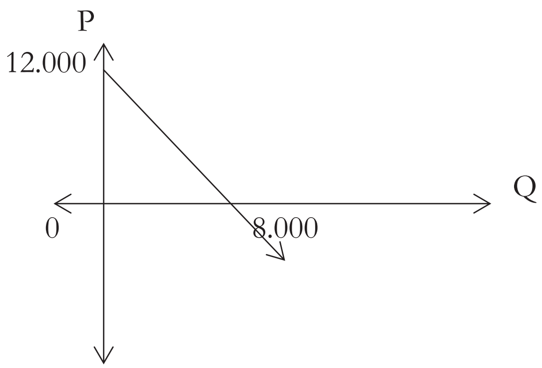
0 = - 2Q + 10 , Q = 5

e. Grafiknya



Contoh 4 :

Fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan grafik di bawah ini.



Jawab :

Cara I : Menggunakan rumus persamaan garis lurus melalui 2 titik.

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}$$

Cara II : Menggunakan perkalian silang

12.000 x Q + 8.000 x P = 12.000 x 8.000

12.000Q + 8.0000P = 96.000.000

3Q + 2P = 24

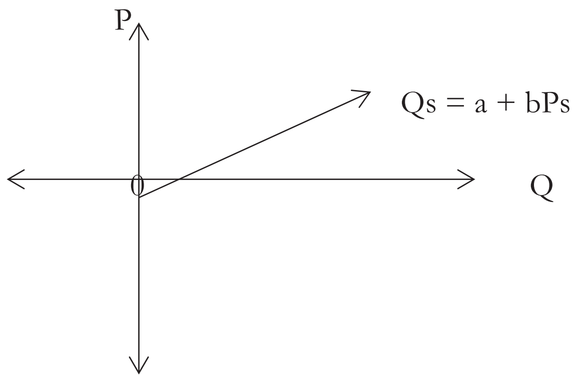
atau Q = 8 – 2/3 P atau ***P = 12 – 3/2 Q***

1.2. Fungsi Supply

Fungsi Penawaran.

Fungsi penawaran adalah persamaan yang menunjukkan hubungan harga barang di pasar dengan jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen. Fungsi penawaran digunakan oleh produsen untuk menganalisa kemungkinan-kemungkinan banyak barang yang akan diproduksi.

Menurut hukum penawaran bila harga barang naik, dengan asumsi cateris paribus (faktor-faktor lain dianggap tetap), maka jumlah barang yang ditawarkan akan naik, dan sebaliknya apabila harga barang menurun jumlah barang yang ditawarkan juga menurun. jadi dalam fungsi penawaran antara harga barang dan jumlah barang yang ditawarkan memiliki hubungan posifit, karenanya gradien (b) dari fungsi penawaran selalu positif.



a dan b = adalah konstanta, dimana b harus bernilai positif
$b = \Delta Qs / \Delta Ps$
Ps= adalah harga barang per unit yang ditawarkan
Qs= adalah banyaknya unit barang yang ditawarkan
$Ps \geq 0$, $Qs \geq 0$, serta $dPs/dQs > 0$

Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Fungsi ***Supply*** (Penawaran) **Dalam Ilmu Ekonomi:**

1. Harga Barang Itu Sendiri (Price of the Good)
   - **Penjelasan**: Semakin tinggi harga suatu barang, semakin banyak produsen yang bersedia menawarkan barang tersebut, dan sebaliknya.
   - **Hubungan**: Positif; jika harga naik, kuantitas yang ditawarkan naik.
2. Biaya Produksi
   - **Penjelasan**: Termasuk biaya bahan baku, tenaga kerja, energi, dan lainnya.
   - **Dampak**: Jika biaya produksi naik, maka keuntungan menurun, sehingga produsen enggan memasok dalam jumlah besar.

3. Teknologi Produksi
   - **Penjelasan**: Teknologi yang lebih baik meningkatkan efisiensi dan menurunkan biaya produksi.
   - **Dampak**: Penawaran meningkat karena produksi menjadi lebih murah dan cepat.
4. Harga Barang Lain yang Berhubungan
   - **Penjelasan**: Jika produsen bisa memproduksi lebih dari satu barang, mereka akan cenderung memproduksi barang yang harganya lebih tinggi.
   - **Contoh**: Petani bisa menanam jagung atau kedelai — jika harga jagung naik, mereka akan mengurangi penawaran kedelai.
5. Harapan Akan Harga di Masa Depan
   - **Penjelasan**: Jika produsen memperkirakan harga akan naik di masa depan, mereka cenderung menahan penawaran saat ini.
   - **Dampak**: Penawaran saat ini bisa turun.
6. Kebijakan Pemerintah
   - **Penjelasan**: Termasuk pajak, subsidi, regulasi, atau insentif lain.
   - **Contoh**: Subsidi akan menurunkan biaya produksi dan meningkatkan penawaran.
7. Jumlah Produsen di Pasar
   - **Penjelasan**: Semakin banyak produsen yang menjual barang yang sama, total penawaran akan meningkat.
   - **Dampak**: Kompetisi meningkatkan total pasokan.
8. Faktor Alam dan Cuaca (untuk produk pertanian)
   - **Penjelasan**: Cuaca buruk atau bencana alam dapat mengganggu produksi.
   - **Dampak**: Penawaran menurun karena hasil panen berkurang.

9. Kemajuan Infrastruktur

- **Penjelasan**: Infrastruktur yang baik (jalan, pelabuhan, listrik) mempermudah dan menurunkan biaya distribusi barang.
- **Dampak**: Meningkatkan penawaran ke pasar.

Faktor-Faktor Kegagalan Fungsi Supply dan Solusinya

No	Faktor Kegagalan Fungsi Supply	Penjelasan	Solusi
1	Gangguan Produksi	Terjadi kerusakan mesin, pemogokan buruh, atau kekurangan bahan baku	Pemeliharaan berkala- Diversifikasi sumber bahan baku- Perjanjian kerja yang adil
2	Bencana Alam	Banjir, kekeringan, gempa bumi, atau hama pertanian yang merusak hasil produksi	Asuransi pertanian & industri- Sistem irigasi dan mitigasi bencana- Teknologi tahan iklim
3	Kenaikan Biaya Produksi	Biaya input (bahan baku, upah, energi) meningkat sehingga produsen mengurangi jumlah yang ditawarkan	Efisiensi produksi- Subsidi pemerintah- Penggunaan teknologi hemat biaya

4	Ketergantungan pada Impor	Jika bahan baku atau alat produksi tergantung dari luar negeri, maka gejolak global bisa menghambat penawaran	Lokalisasi sumber daya-Kebijakan substitusi impor-Pengembangan industri lokal
5	Kebijakan Pemerintah yang Tidak Stabil	Perubahan pajak, tarif, atau regulasi yang mendadak bisa mengganggu rencana produksi	Kepastian hukum-Konsultasi regulasi dengan pelaku usaha-Peraturan jangka panjang yang stabil
6	Kurangnya Infrastruktur	Jalan rusak, listrik tidak stabil, dan akses logistik yang buruk menghambat distribusi barang	Investasi infrastruktur-Kerjasama pemerintah-swasta (PPP)-Modernisasi sistem transportasi dan logistik
7	Teknologi Produksi Tertinggal	Produsen masih menggunakan metode tradisional atau teknologi lama yang tidak efisien	Pelatihan & adopsi teknologi baru- Bantuan alat produksi modern-Kemitraan dengan lembaga riset

8	Ketidakpastian Pasar	Produsen ragu menawarkan barang karena fluktuasi harga atau permintaan yang tidak pasti	Sistem informasi pasar real-time-Kontrak jangka panjang-Manajemen risiko dan hedging
9	Masalah Pembiayaan/ Modal	Tidak ada akses ke kredit atau modal kerja, sehingga produksi terbatas	Akses ke kredit mikro/koperasi-Program pinjaman usaha kecil- Dana bergulir pemerintah

Contoh 1 :

Pada saat harga durian Rp. 3.000 perbuah toko A hanya mampu menjual Durian sebanyak 100 buah, dan pada saat harga durian Rp. 4.000 perbuah toko A mampu menjual Durian lebih banyak menjadi 200 buah. dari kasus tersebut buatlah fungsi penawarannya ?

Jawab:

P1 = 3.000 , Q1 = 100

P2 = 4.000 , Q2 = 200

Langkah selanjutnya, kita substitusi data-data di atas ke dalam rumus persamaan linier melalui 2 titik.

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1} \text{ menjadi } \frac{P-3.000}{4.000-3.000} = \frac{Q-100}{200-100}$$

$$\frac{P-3.000}{1.000} = \frac{Q-100}{100}$$

(P – 3.000).100 = 1.000.(Q – 100)

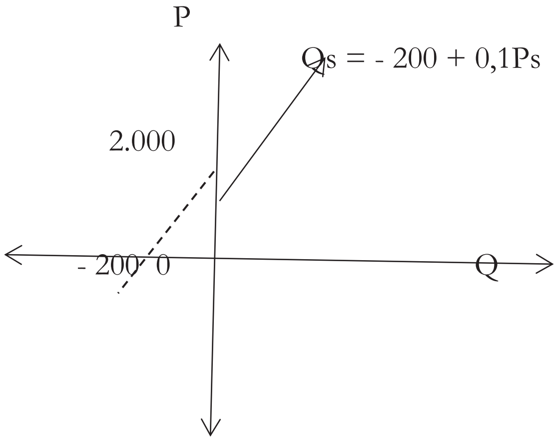
100P – 300.000 = 1.000Q – 100.000

-300.000 + 100.000 + 100P = 1.000Q

$$1.000\ Q = -\ 200.000 + 100P$$
$$Q = -\ 200 + 0{,}1P$$

Jadi dari kasus di atas diperoleh fungsi penawarannya , Qs = - 200 + 0,1Ps

Grafik fungsinya :



Contoh 2:

Penawaran suatu barang sebanyak 500 buah pada saat harga 4000. Apabila setiap kenaikan harga sebesar 1.250 akan menyebabkan jumlah penawaran mengalami peningkatan sebesar 250, bagaimana fungsi penawarannya dan gambarkan fungsi penawaran tersebut pada Grafik Jartesius

Jawab:

$P1 = 40.000 \quad , Q1 = 500$

$\Delta P = 1.250 \quad , \Delta Q = 250$

$P - P1 = m\ (\ Q - Q1\ )$

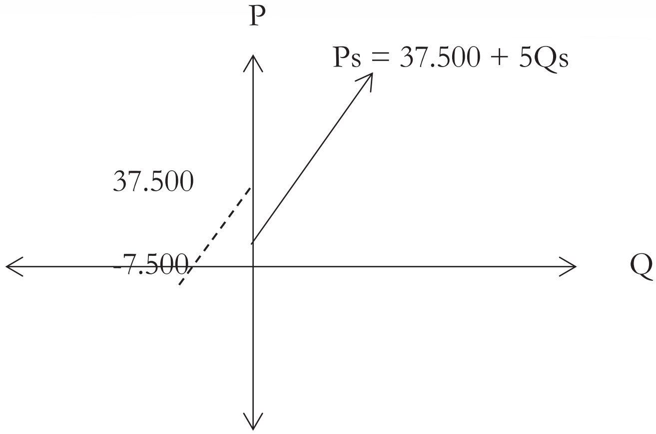
$$m = \Delta P/\Delta Q = 1.250/250 = 5$$

$P - 40.000 = 5\ (\ Q - 500\ )$

$$P = 5Q - 2500 + 40.000$$
$$P = 37.500 + 5Q$$

Fungsi penawaran kasus di atas adalah , Ps = 37.500 + 5Qs

Grafik fungsinya :



Contoh 3 :

Diketahui fungsi penawaran suatu barang mempunyai persamaan sebagai berikut :

$$2P - Q + 20 = 0$$

Tentukan :

a. Berapa kuantitas yang ditawarkan bila harga Rp5
b. Berapa harganya bila kuantitas yang ditawarkan 22 unit
c. Berapa harga terendah, sehingga tak ada seorang penjualpun yg mahu menawarkan barangnya
d. Gambarkan

Jawab :

a. P = 5 disubstitusi ke $2P - Q + 20 = 0$

$$2(5) + 20 = Q$$
$$Q = 30$$

Jika harga barang 5 maka yang ditawarkan sebanyak 30 unit.

b. Q = 22 disubstitusikan ke $2P - Q + 20 = 0$

$$2P - 22 + 20 = 0$$
$$P = 1$$

Apabila barang yang ditawarkan sebanyak 22 unit maka harga yang ditawarkan sebesar Rp 1.

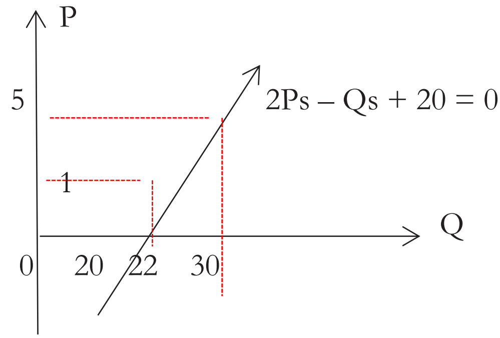
c. tidak ada seorang penjual mahu menawarkan apabila barangnya tidak ada

(Q = 0)   , maka Q = 0 disubstitusi ke 2P – Q + 20 = 0

$$2P - 0 + 20 = 0$$
$$P = 10$$

tidak ada seorang penjual mahu menawarkan jika harga yang ditawarkan sebesar Rp 10.

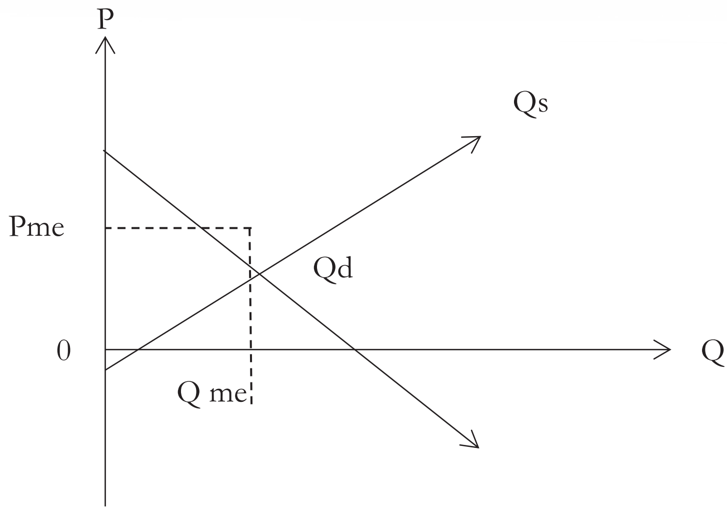
e. gambar grafik.



1.3. Keseimbangan Pasar (Market Equilibrium)

Keseimbangan pasar *(market equilibrium)* merupakan kondisi di mana jumlah barang yang diminta sama dengan jumlah barang yang ditawarkan pada tingkat harga tertentu. Keseimbangan pasar juga dapat dipahami sebagai suatu kondisi di mana harga produk yang ditawarkan sama dengan harga produk yang diminta oleh konsumen.

Keseimbangan harga di pasar tercapai apabila Qd = Qs atau Pd = Ps, Jadi keseimbangan harga merupakan kesepakatan-kesepakatan antara produsen dan konsumen di pasar.



Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Fungsi Market Equilibrium:

1. **Harga Barang/Jasa Itu Sendiri**
   - Harga adalah elemen utama dalam fungsi permintaan dan penawaran.
   - Perubahan harga akan menggeser jumlah barang yang diminta dan ditawarkan, sehingga mengubah titik keseimbangan.

2. **Pendapatan Konsumen**
   - Jika pendapatan meningkat, daya beli konsumen meningkat → permintaan naik → harga naik → keseimbangan bergeser ke atas.
   - Sebaliknya, penurunan pendapatan menurunkan permintaan.

3. **Preferensi dan Selera Konsumen**
   - Perubahan tren, mode, budaya, atau opini publik dapat memengaruhi permintaan suatu barang.
   - Jika permintaan meningkat karena preferensi berubah, maka keseimbangan pasar akan bergeser.

4. **Harga Barang Substitusi dan Komplemen**
   - Barang substitusi: Jika harga barang substitusi naik, maka permintaan terhadap barang ini naik → keseimbangan bergeser.
   - Barang komplemen: Jika harga barang pelengkap naik, permintaan turun → keseimbangan turun.
5. **Biaya Produksi**
   - Jika biaya produksi meningkat (misalnya karena kenaikan harga bahan baku atau upah), maka kurva penawaran bergeser ke kiri → jumlah yang ditawarkan menurun → harga keseimbangan naik.
6. **Teknologi Produksi**
   - Perkembangan teknologi bisa meningkatkan efisiensi → penawaran naik → harga turun → keseimbangan berubah.
7. **Kebijakan Pemerintah**
   - Subsidi, pajak, atau regulasi dapat memengaruhi baik permintaan maupun penawaran.
     - Pajak ↑ → biaya produksi ↑ → penawaran ↓ → harga naik.
     - Subsidi ↑ → produksi murah → penawaran ↑ → harga turun.
8. **Ekspektasi Masa Depan**
   - Jika produsen atau konsumen memperkirakan harga akan naik di masa depan, maka:
     - Konsumen akan membeli lebih banyak sekarang → permintaan naik.
     - Produsen bisa menahan stok → penawaran menurun.
   - Ini menyebabkan perubahan keseimbangan saat ini.
9. **Jumlah Pelaku Pasar (Produsen dan Konsumen)**
   - Jika jumlah produsen bertambah → penawaran meningkat → harga turun.
   - Jika jumlah konsumen bertambah → permintaan naik → harga naik.

10. Kondisi Alam dan Cuaca (terutama untuk barang agrikultur)

- Cuaca buruk → panen gagal → penawaran turun → harga naik.
- Cuaca bagus → produksi naik → harga turun.

Faktor-Faktor Kegagalan Fungsi Market Equilibrium dan solusinya

Kegagalan pasar (market failure) terjadi ketika mekanisme pasar tidak mampu menghasilkan alokasi sumber daya yang efisien atau adil. Hal ini menyebabkan harga dan kuantitas yang terbentuk **tidak mencerminkan keseimbangan sejati** antara permintaan dan penawaran.

Berikut adalah faktor-faktor utamanya:

1. Adanya Monopoli atau Struktur Pasar Tidak Sempurna

- Masalah: Jika hanya ada satu atau sedikit produsen, mereka bisa mengatur harga seenaknya, menyebabkan harga keseimbangan terlalu tinggi dan kuantitas terlalu rendah.
- Solusi:
  - o Regulasi pemerintah terhadap harga.
  - o Mendorong kompetisi (anti-monopoli).
  - o Mendirikan badan pengawas persaingan usaha (seperti KPPU di Indonesia).

2. Eksternalitas (Eksternalitas Positif dan Negatif)

- Eksternalitas Negatif: Contohnya polusi akibat produksi barang (biaya tidak ditanggung produsen).
- Eksternalitas Positif: Contohnya vaksinasi, pendidikan (manfaat tidak dibayar sepenuhnya oleh penerima).
- Solusi:
  - o Eksternalitas negatif → pajak (pigovian tax), regulasi lingkungan.
  - o Eksternalitas positif → subsidi, insentif pemerintah untuk meningkatkan konsumsi.

3. Informasi Asimetris (Asymmetric Information)

- Masalah: Salah satu pihak (produsen atau konsumen) memiliki informasi lebih banyak dari yang lain, menyebabkan keputusan tidak efisien.
  - o Contoh: Konsumen tidak tahu kualitas barang → membeli barang jelek dengan harga tinggi.
- Solusi:
  - o Regulasi transparansi produk.
  - o Sertifikasi dan label kualitas.
  - o Perlindungan konsumen.

4. Barang Publik (Public Goods)

- Masalah: Barang seperti jalan umum, pertahanan, atau lampu jalan tidak bisa dibatasi penggunaannya, sehingga tidak ada insentif bagi swasta untuk menyediakannya.
- Solusi:
  - o Pemerintah menyediakan barang publik secara langsung.
  - o Pembiayaan melalui pajak kolektif.

5. Ketidakseimbangan Distribusi Pendapatan

- Masalah: Ketimpangan ekonomi bisa menyebabkan daya beli rendah dan permintaan efektif turun, membuat pasar tidak efisien.
- Solusi:
  - o Sistem pajak progresif.
  - o Subsidi untuk kelompok miskin.
  - o Program jaminan sosial dan pelatihan kerja.

6. Ketidakseimbangan Permintaan dan Penawaran Jangka Pendek

- Masalah: Dalam jangka pendek, pasar tidak selalu bisa menyesuaikan diri karena waktu produksi, stok terbatas, atau keterlambatan distribusi.
- Solusi:

- Kebijakan stabilisasi oleh pemerintah (misalnya operasi pasar).
- Manajemen stok nasional (seperti Bulog).

7. **Kegagalan Infrastruktur Pasar**

- Masalah: Kurangnya pasar, sistem distribusi, transportasi, dan logistik menyebabkan barang tidak tersedia di lokasi yang tepat.
- Solusi:
  - Investasi infrastruktur dan logistik.
  - Penguatan jaringan distribusi.

8. **Spekulasi dan Manipulasi Pasar**

- Masalah: Pelaku pasar bisa menaikkan atau menurunkan harga dengan cara spekulasi (misalnya menimbun barang).
- Solusi:
  - Pengawasan dan regulasi ketat.
  - Transparansi data pasokan dan permintaan.

Contoh 1 :
Tentukan jumlah barang dan harga pada keseimbangan pasar untuk fungsi permintaan $Qd = 10 - 0{,}2Pd$ dan
fungsi penawaran $Qs = -2 + 0{,}2Ps$.
Jawab :

$$Q = 10 - 0{,}2P$$
$$Q = -2 + 0{,}2P$$

Cara I : Menggunakan metode substitusi

$$10 - 0{,}2P = -2 + 0{,}2P$$
$$10 + 2 = 0{,}2P + 0{,}2P$$
$$0{,}4P = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P = 30$$

$P = 30$ substitusi ke $Q = 10 - 0{,}2P$

$$Q = 10 - 0{,}2(30) = 4$$

Cara II ; Menggunakan metode substitusi

$$\begin{array}{l} Q = 10 - 0{,}2P \\ Q = -2 + 0{,}2P \\ \hline \end{array} \quad -$$

0 = 12 – 0,4P …………….. P = 30

$$\begin{array}{l} Q = 10 - 0{,}2P \\ Q = -2 + 0{,}2P \quad + \\ \hline \end{array}$$

2Q = 8 ……………… Q = 4

Cara III : Menggunakan metode elemenasi dan substitusi

$$\begin{array}{l} Q = 10 - 0{,}2P \\ Q = -2 + 0{,}2P \\ \hline \end{array} \quad -$$

0 = 12 – 0,4P …………….. P = 30

P = 30 disubstitusi ke Q = 10 – 0,2P

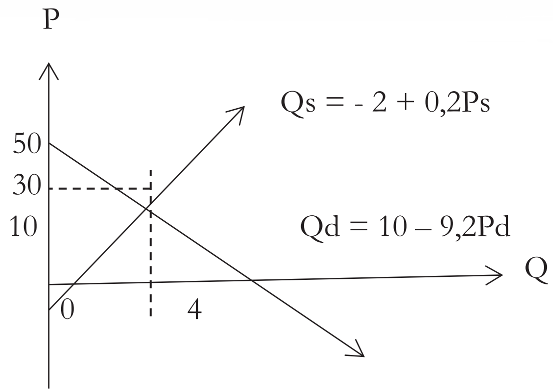
Q = 10 – 0,2(30) ……. Q = 4

Langkah selanjutnya menentukan titik potong dengan sumbu P dan Q ke dua persamaan di atas .

Q = 10 – 0,2P   Q = - 2 + 0,2P

P	0	50
Q	10	0

P	0	10
Q	- 2	0



Contoh 2 :

Untuk suatu barang, pada harga Rp 6000 pengusaha menawarkan barang sebanyak 30 buah, dan setiap kenaikan harga sebesar Rp2000 maka jumlah barang yang ditawarkan meningkat sebanyak 20 unit. Pada harga Rp5000 jumlah permintaan barang sebanyak 20 unit dan untuk kenaikan harga menjadi Rp10.000 jumlah permintaannya berkurang menjadi 10 unit. Bagaimanakah fungsi permintaan dan fungsi penawaran barang tsb ? Dimanakah keseimbangan harga dan keseimbangan kuantitas tercapai ? Gambarkan kedua fungsi tersebut pada sebuah grafik kartesius

Jawab :

$Ps1 = 6.000$, $Qs1 = 30$

$\Delta Ps\ \ 2.000$, $\Delta Qs = 20$

$ms = \Delta Ps/\Delta Qs = 2.000/20 = 100$

$P - P1 = m\ (Q - Q1)$

$P - 6.000 = 100\ (Q - 30)$

$P - 6.000 = 100Q - 3.000$

$Ps = 3.000 + 100Qs$

$Pd1 = 5.000,$ $Qd1 = 20$

$Pd2 = 10.000$, $Qd2 = 10$

Gunakan persamaan :

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}$$

$$\frac{P-5.000}{10.000-5.000} = \frac{Q-20}{10-20}$$

Pd = 15.000 – 500Qd

Syarat Market equilibrium, Pd = Ps

P = 15.000 – 500Q

P = 3.000 + 100Q ………… 15.000 – 500Q = 3.000 + 100Q

15.000 – 3.000 = 100Q + 500Q

600Q = 12.000

Q = 20

Q = 20 substitusi ke P = 15.000 – 500Q

P = 15.000 – 500(20) = 5.000

Market Equilibrium kasus di atas adalah = (Q, P) = (20, 5.000)

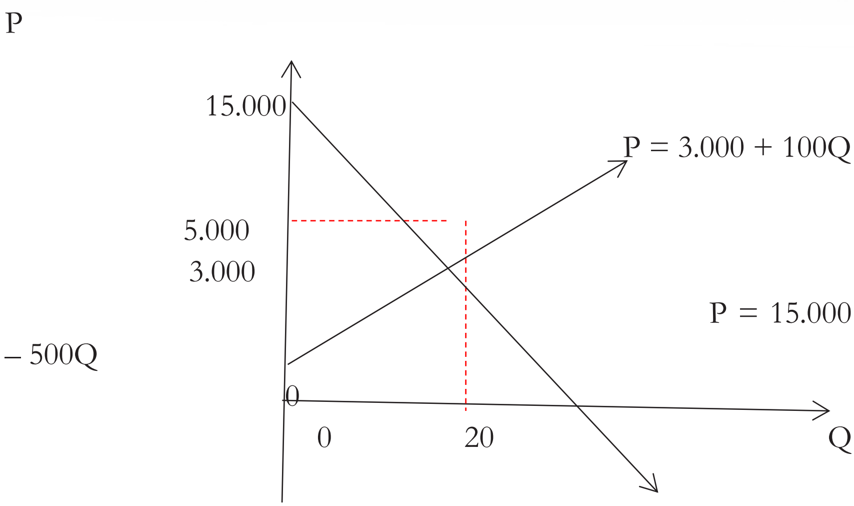
Grafik fungsinya :

P = 15.000 – 500Q

P	0	15.000
Q	30	0

P = 3.000 + 100Q

P	0	3.000
Q	- 30	0



1.4. Pengaruh Pajak Dan Subsidi Pada Keseimbangan Pasar

1.4.1. Pengaruh Pajak Pada Keseimbangan Pasar.

Pajak yang dikenakan atas penjualan selalu menambah harga barang yang ditawarkan. Sehingga hanya mempengaruhi fungsi penawaran. Sedangkan pada fungsi permintaan tidak mengalami perubahan sama sekali.

1.4.2. Jenis Pajak dan Dampaknya

Ada dua jenis pajak utama yang sering memengaruhi keseimbangan pasar:

- **Pajak atas penjualan (sales tax)**: biasanya dikenakan pada konsumen dan menyebabkan harga barang naik.
- **Pajak atas produksi atau pajak spesifik (excise tax)**: dikenakan pada produsen berdasarkan unit barang yang diproduksi atau dijual.

Kedua jenis pajak tersebut mempengaruhi posisi kurva penawaran atau permintaan dan menggeser titik keseimbangan pasar.

1.4.3. Pengaruh Pajak terhadap Kurva Penawaran dan Permintaan

a. Kurva Penawaran Bergeser ke Kiri

Ketika pemerintah mengenakan pajak pada produsen, biaya produksi meningkat. Akibatnya, produsen cenderung menawarkan lebih sedikit barang pada setiap tingkat harga. Hal ini menyebabkan **kurva penawaran bergeser ke kiri**.

Misalnya, jika sebelum pajak produsen menjual 100 unit barang pada harga Rp10.000, setelah pajak sebesar Rp2.000 per unit, mereka hanya bersedia menjual jumlah yang sama pada harga Rp12.000. Jika harga tidak naik, mereka mungkin mengurangi jumlah produksi. Hal ini menyebabkan **kenaikan harga pasar dan penurunan kuantitas keseimbangan**.

b. Keseimbangan Baru

Perubahan ini menghasilkan titik keseimbangan baru:

- **Harga jual kepada konsumen meningkat**.
- **Jumlah barang yang diperjualbelikan menurun**.
- **Produsen menerima harga bersih yang lebih rendah (setelah dikurangi pajak)**.

1.4.4. Beban Pajak: Siapa yang Menanggung?

Beban pajak tidak selalu sepenuhnya ditanggung oleh produsen, meskipun mereka yang membayar pajak kepada pemerintah. Dalam teori ekonomi, beban pajak dibagi antara produsen dan konsumen, tergantung pada elastisitas permintaan dan penawaran.

- **Jika permintaan tidak elastis** (konsumen tetap membeli meskipun harga naik), **konsumen menanggung beban pajak lebih besar**.
- **Jika penawaran tidak elastis** (produsen sulit menyesuaikan jumlah produksi), **produsen menanggung beban lebih besar**.

Contohnya, pajak rokok lebih banyak ditanggung oleh konsumen karena permintaan rokok cenderung inelastis.

1.4.5. Dampak terhadap Konsumen dan Produsen

a. *Konsumen*

- Harga barang menjadi lebih mahal.
- Daya beli menurun.
- Konsumsi turun karena harga setelah pajak lebih tinggi dari harga sebelum pajak.

b. *Produsen*

- Pendapatan menurun karena menerima harga bersih lebih rendah.
- Volume penjualan menurun.
- Potensi keuntungan berkurang, terutama jika pajak tinggi dan permintaan elastis.

1.4.6. Efisiensi dan Distorsi Pasar

Pengenaan pajak menciptakan apa yang disebut **"deadweight loss"** atau kerugian efisiensi. Ini adalah nilai dari transaksi yang hilang karena konsumen dan produsen tidak lagi melakukan pertukaran yang seharusnya menguntungkan kedua belah pihak.

Contohnya:

- Sebelum pajak, konsumen bersedia membeli produk dengan harga Rp10.000, dan produsen bersedia menjual dengan harga tersebut.
- Setelah pajak, harga naik menjadi Rp12.000, dan banyak konsumen yang mundur dari pasar.
- Akibatnya, terjadi pengurangan kesejahteraan konsumen dan produsen secara keseluruhan.

1.4.7. Tujuan dan Solusi Kebijakan

Meskipun pajak menimbulkan distorsi, pajak tetap diperlukan untuk:

- Meningkatkan pendapatan negara.
- Mendorong keadilan sosial.
- Mengendalikan konsumsi barang merugikan (seperti rokok dan alkohol).

Untuk mengurangi dampak negatif terhadap keseimbangan pasar, pemerintah dapat:

- Memberikan subsidi pada sektor strategis.
- Memberlakukan pajak secara progresif.
- Menggunakan hasil pajak untuk infrastruktur dan pelayanan publik agar produktivitas meningkat.

1.4.8. Dampak Positif Pajak

1. *Sumber Pendapatan Negara*

Dampak paling nyata dari pajak adalah sebagai sumber utama pendapatan negara. Pajak digunakan untuk:

- Mendanai pembangunan infrastruktur (jalan, jembatan, pelabuhan, dll.).
- Menyediakan layanan publik (pendidikan, kesehatan, keamanan).
- Membiayai subsidi dan bantuan sosial kepada kelompok miskin dan rentan.

2. *Redistribusi Pendapatan*

Pajak memungkinkan pemerintah mendistribusikan ulang kekayaan agar lebih adil. Pajak progresif, misalnya, menarik tarif lebih tinggi dari kelompok kaya, yang hasilnya digunakan untuk program kesejahteraan bagi kelompok berpenghasilan rendah. Ini membantu mengurangi kesenjangan ekonomi.

3. *Mengatur Perilaku Ekonomi*

Pajak dapat digunakan sebagai alat untuk memengaruhi perilaku masyarakat dan pelaku usaha:

- Pajak rokok dan alkohol bertujuan mengurangi konsumsi barang-barang tersebut.
- Pajak karbon ditujukan untuk mengurangi emisi dan mendorong investasi ramah lingkungan.
- Insentif pajak diberikan untuk sektor prioritas seperti energi terbarukan atau industri dalam negeri.

4. *Menjaga Stabilitas Ekonomi*

Pajak digunakan untuk menstabilkan ekonomi melalui kebijakan fiskal. Saat ekonomi tumbuh terlalu cepat (overheating), pajak dinaikkan untuk menahan konsumsi. Sebaliknya, saat terjadi resesi, pemotongan pajak bisa merangsang daya beli dan investasi.

1.4.9. Dampak Negatif Pajak

1. *Beban Ekonomi Tambahan*

Pajak dapat menjadi beban tambahan bagi masyarakat dan pelaku usaha. Jika tarif pajak terlalu tinggi, hal ini:

- Menurunkan daya beli masyarakat.
- Meningkatkan biaya produksi.
- Mengurangi insentif berinvestasi dan berinovasi.

2. *Distorsi Pasar*

Pajak dapat menyebabkan distorsi dalam mekanisme pasar:

- Harga barang naik karena produsen membebankan pajak ke konsumen.
- Produksi dan konsumsi barang turun, menyebabkan penurunan efisiensi pasar.
- Munculnya “deadweight loss” atau kerugian kesejahteraan sosial akibat berkurangnya transaksi pasar.

3. *Mendorong Penghindaran dan Penggelapan Pajak*

Jika sistem perpajakan dianggap tidak adil, terlalu rumit, atau tarifnya tinggi, maka individu dan perusahaan cenderung:

- Menghindari kewajiban pajak (tax avoidance).
- Melakukan praktik ilegal (tax evasion). Ini menyebabkan berkurangnya penerimaan negara dan ketimpangan ekonomi.

4. *Beban pada UMKM*

UMKM (Usaha Mikro, Kecil, dan Menengah) sering kali terbebani oleh pajak, terutama bila tidak dibarengi dengan edukasi dan fasilitas pembukuan yang memadai. Akibatnya, banyak UMKM yang memilih tetap berada di sektor informal agar tidak terkena pajak.

5. *Dampak terhadap Investasi Asing*

Negara dengan tarif pajak tinggi berisiko kehilangan daya saing dalam menarik investasi asing. Investor cenderung memilih negara dengan sistem pajak yang lebih ringan dan lebih pasti secara hukum.

1.4.10. Solusi untuk Mengatasi Dampak Negatif Pajak1.

Reformasi Sistem Perpajakan

Pemerintah perlu melakukan reformasi perpajakan agar sistemnya:

- Sederhana dan mudah dipahami.
- Transparan dan tidak memberi ruang untuk korupsi.
- Adil dan proporsional sesuai dengan kemampuan wajib pajak.

1. *Penerapan Pajak yang Progresif dan Berkeadilan*

Pajak progresif dapat mengurangi beban masyarakat miskin dan meningkatkan keadilan sosial. Pajak kekayaan dan pajak atas penghasilan tinggi dapat digunakan untuk membiayai program-program sosial.

2. *Insentif Pajak untuk Sektor Tertentu*

Memberikan insentif pajak atau pengurangan tarif bagi:

- UMKM yang taat pajak.
- Sektor ekonomi hijau dan inovatif.
- Investasi jangka panjang dan padat karya.

4. *Peningkatan Kepatuhan Pajak*

Melalui edukasi, digitalisasi, dan pelayanan yang baik, pemerintah dapat mendorong:

- Wajib pajak untuk lebih taat.
- Transparansi dalam pelaporan.
- Peningkatan penerimaan negara tanpa harus menaikkan tarif.

5. *Pemanfaatan Pajak Secara Efisien*

Masyarakat akan lebih rela membayar pajak jika mereka merasakan manfaatnya secara langsung. Oleh karena itu, anggaran dari pajak harus dikelola dengan efisien, transparan, dan akuntabel. Ini menciptakan **trust** atau kepercayaan publik terhadap pemerintah.

6. *Evaluasi dan Penyesuaian Berkala*

Pemerintah perlu terus mengevaluasi tarif dan jenis pajak secara berkala agar tetap sesuai dengan kondisi ekonomi. Fleksibilitas ini penting untuk menghindari beban pajak berlebihan yang dapat menghambat pertumbuhan.

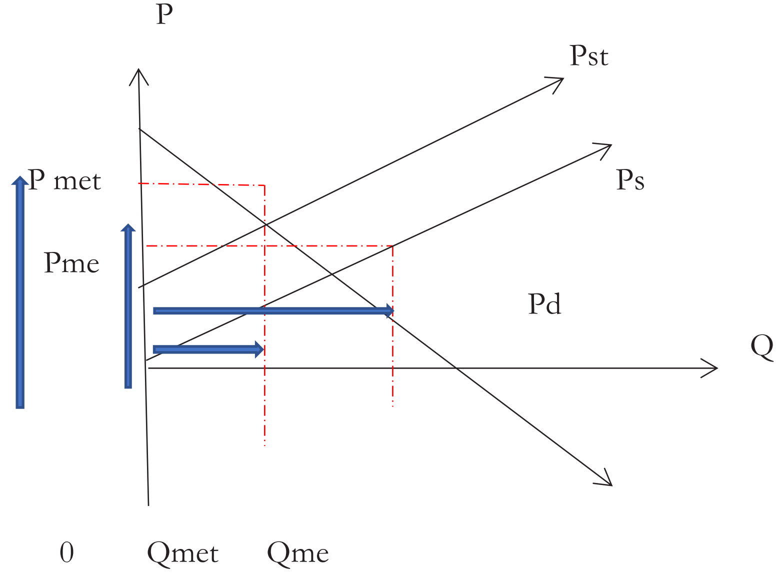
Fungsi penawaran sebelum dikenakan pajak adalah $P = F(Q)$. Dan fungsi penawaran setelah dikenakan pajak t perunit adalah $P = F(Q) + t$.

Maka keseimbangan pasarnya adalah dengan memecahkan fungsi persamaan penawaran sebelum dan setelah dikenakan pajak.

Total pajak yang diterima oleh permerintah adalah T pemerintah = Pajak x Q pada keseimbangan setelah pajak.

Pajak yang ditanggung oleh konsumen adalah (Pt-Pe) x Qt.

Sedangkan pajak yang ditanggung oleh produsen adalah total pajak yang diterima oleh pemerintah – pajak yang ditanggung oleh konsumen.



Rumus keseimbangan pasar setelah ada pajak : Pd = Ps + tax

Contoh1 :

Jika fungsi permintaan akan beras dan fungsi penawaran akan beras yang diberikan sebagai berikut : Pd = 12- Q dan Ps = 2 + Q sedangkan pemerintah mengenakan pajak sebesar 4 setiap unit beras yang diproduksi.

Tentukan:

a. Nilai keseimbangan pasar sebelum pajak
b. Nilai keseimbangan pasar setelah pajak
c. Total pajak yang dibayar oleh pemerintah
d. Besarnya pajak yang ditanggung oleh produsen
e. Besarnnya pajak yang ditanggung oleh konsumen
f. grafiknya

Jawab :

Cara I :

a. $P = 12 - Q$

$P = 2 + Q$ ……………….. $12 - Q = 2 + Q$

$12 - 2 = Q + Q$

$2Q = 10$ ………….. $Q = 5$

$Q = 5$ substitusi ke $P = 12 - Q$

$P = 12 - 5 = 7$

Keseimbangan pasar sebelum pajak adalah = (Q, P) = (5, 7)

b. keseimbangan pasar setelah ada pajak : Pd = Ps + tax

$12 - Q = 2 + Q + 4$

$12 - Q = 6 + Q$

$12 - 6 = Q + Q$

$2Q = 6$ ……….. $Qs = 3$

$Q = 3$ substitusi ke $Pd = 12 - Q$

$P = 12 - 3$ ………… $Ps = 9$

Keseimbangan pasar setelah ada pajak adalah = (3 , 9).

c. total pajak yang diterima pemerintah adalah besar pajak yang ditetapkan pemerintah dikali banyak beras yang dibeli setelah ada pajak,

Tpemerintah = t x Qs = 4 x 3 = 12

d. besar pajak yang ditanggung produsen adalah selisih pajak yang dibayar konsumen dengan besar pajak yang dibebankan pemerintah.

Besar pajak yang ditanggung konsumen adalah selisih harga setelah ada pajak dengan harga sebelum ada pajak.

t konsumen = Ps – P = 9 – 7 = 2

% t konsumen = tkonsumen/T x 100%

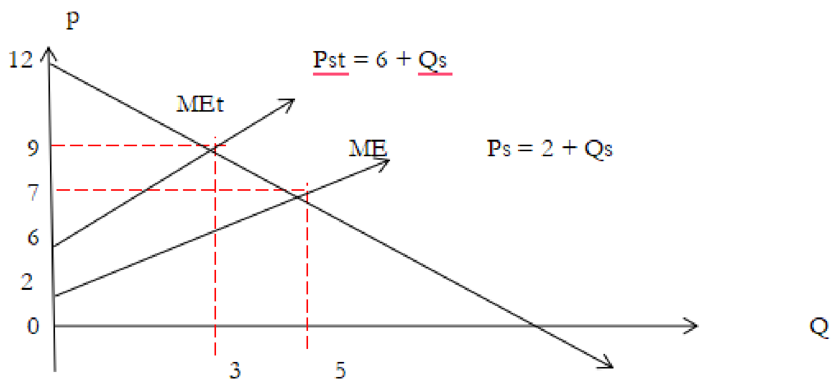
= 2/4 x 100% = 50%

t produsen = T – tkonsumen = 4 – 2 = 2

% t produsen = 100% - 50% = 50% atau

% t produsen = (T – tkonsumen)/T x 100%
% t produsen = 2/4 x 100% = 50%

f. grafiknya:



Cara II:

ME = (Q , P) = (5 , 7) tk = 9 – 7 = 2
MEt = (Qs, Ps) = (3 , 9) tp = 4 – 2 = 2

Tg = T x Qs = 4 x 3 = 12
Tk = tk x Qs = 2 x 3 = 6
Tp = tp x Qs = 2 x 3 = 6
Tg = Tk + Tp = 6 + 6 = 12

Contoh 2 :
Diberikan fungsi permintaan dan fungsi penawaran :

Qd = 11 – P dan Qs = - 4 + 2P

Kepada produsen , pemerintah mengenakan pajak dengan tarif pajak sebesar t = Rp3/unit barang

a. Carilah keseimbangan harga dan kuantitas di pasar sebelum dan sesudah ada pajak

b. Gambarkan perubahan akibat pajak tersebut
c. Berapa tarif pajak yang ditanggung konsumen
d. Berapa tarif pajak yang ditanggung produsen
e. Berapa total pajak yang diterima pemerintah
f. Berapa total pajak yang ditanggung konsumen
g. Berapa total pajak yang ditanggung produsen
h. Arsirlah total pajak masing-masing pada gambar di atas

Jawab :

a. $Qd = 11 - Pd$ ………….. $P = 11 - Q$

$Qs = -4 + 2Ps$ ……….. $2P = 4 + Q$

$P = 2 + ½ Q$

Keseimbangan pasar sebelum ada pajak : $Pd = Ps$

$$11 - Q = 2 + ½ Q$$
$$11 - 2 = ½ Q + Q$$
$$3/2 Q = 9$$
$$Q = 9 \times 2/3 = 6$$

$Q = 6$ substitusi ke : $P = 11 - Q$

$P = 11 - 6 = 5$

Keseimbangan pasar ***sebelum*** ada pajak adalah : (6 , 5)

Keseimbangan pasar setelah ada pajak sebesar $t = 3$

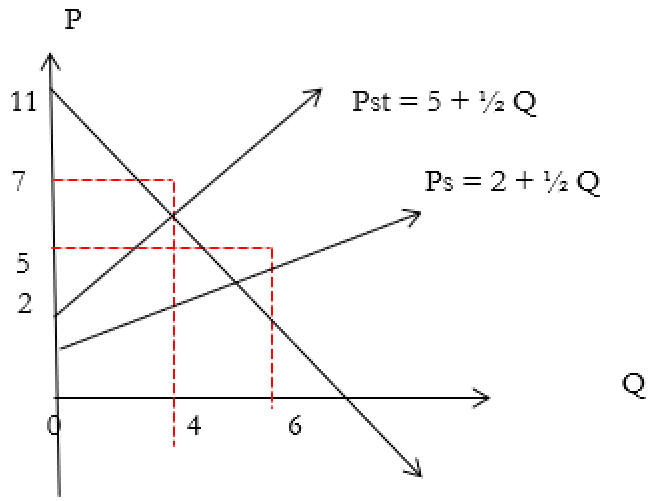
$$Pd = Ps + tax$$
$$11 - Q = 2 + ½ Q + 3$$
$$11 - Q = 5 + ½ Q$$
$$11 - 5 = ½ Q + Q$$
$$3/2 Q = 6$$
$$Q = 6 \times 2/3 = 4$$

$Q = 4$ substitusi ke $Pd = 11 - Q$

$P = 11 - 4 = 7$

Keseimbangan pasar ***setelah*** ada pajak adalah : (4 , 7)

b. gambar perubahan akibat ada pajak.



c. ME = (6 , 5)
MEt = (4 , 7) tk = 7 – 5 = 2 (2/3 x 100% = 66,7%)
tp = 3 – 2 = 1 (1/3 x 100% = 33,3%)

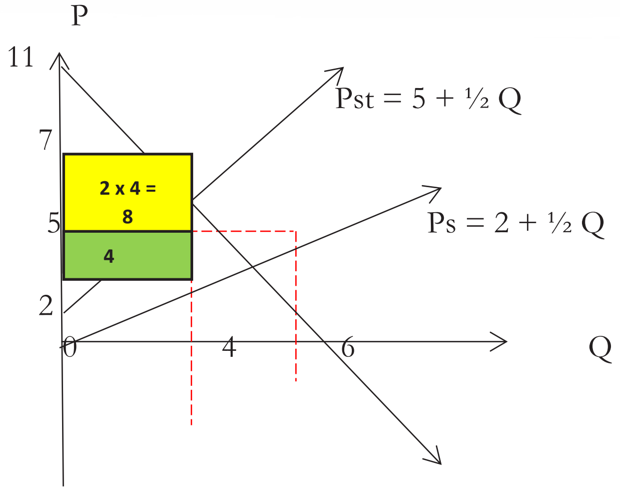
tarif pajak yang ditanggung konsumen sebesar Rp 2 atau 66,7%

d. tarif pajak yang ditanggung produsen sebesar Rp 1 atau 33,3%

e. Total pajak yang diterima pemerintah adalah = Rp 3 x 4 = Rp 12

f. Total pajak yang ditanggung konsumen sebesar = Rp 2 x 4 = Rp 8

g. Total pajak yang ditanggung produsen sebesar = Rp 1 x 4 = Rp 4



1.4.2. Pengaruh Subsidi Pada Keseimbangan Pasar.

Subsidi adalah bantuan finansial yang diberikan oleh pemerintah kepada produsen atau konsumen dengan tujuan menurunkan biaya produksi atau harga jual suatu barang atau jasa. Dalam konteks pasar, subsidi memiliki peran penting dalam mempengaruhi struktur harga, kuantitas yang diperjualbelikan, dan distribusi kesejahteraan ekonomi. Subsidi dapat diberikan dalam berbagai bentuk, seperti subsidi harga, subsidi produksi, subsidi konsumsi, dan insentif pajak. Namun, dalam seluruh bentuknya, subsidi selalu berimplikasi terhadap perubahan dalam mekanisme keseimbangan pasar.

1. Subsidi dan Perubahan Fungsi Penawaran

Ketika pemerintah memberikan subsidi kepada produsen, biaya produksi menjadi lebih rendah. Penurunan biaya ini akan meningkatkan keuntungan produsen pada setiap tingkat harga yang sama, yang pada akhirnya menyebabkan pergeseran kurva penawaran ke kanan (penawaran meningkat).

Secara matematis, jika fungsi penawaran awal adalah:

$$Qs = c + dP$$

setelah subsidi sebesar sss, harga efektif yang diterima produsen menjadi P+s , sehingga fungsi penawaran berubah menjadi:

$$Qs = c + d(P+s)$$

Artinya, untuk setiap tingkat harga pasar, jumlah barang yang ditawarkan akan lebih banyak dibandingkan sebelum adanya subsidi.

2. Subsidi dan Keseimbangan Pasar Baru

Keseimbangan pasar terjadi ketika jumlah yang diminta sama dengan jumlah yang ditawarkan (Qd = Qs). Ketika kurva penawaran bergeser ke kanan akibat subsidi, maka pada harga awal akan terjadi surplus barang. Untuk mengembalikan keseimbangan, harga akan turun sampai titik keseimbangan baru tercapai, di mana konsumen bersedia membeli lebih banyak karena harga yang lebih rendah.
Secara grafis:

- Kurva penawaran bergeser ke kanan
- Titik keseimbangan baru berada di kuantitas yang lebih tinggi dan harga pasar yang lebih rendah (jika subsidi kepada produsen)
- Harga yang dibayar konsumen turun, tetapi produsen tetap menerima harga yang lebih tinggi karena subsidi

Sebaliknya, jika subsidi diberikan kepada konsumen (misalnya dalam bentuk voucher atau subsidi langsung), maka kurva permintaan akan bergeser ke kanan. Konsumen memiliki daya beli lebih tinggi, sehingga mereka bersedia membeli lebih banyak pada setiap tingkat harga.

3. Dampak Subsidi pada Harga dan Kuantitas

Tergantung kepada siapa subsidi diberikan, efeknya terhadap harga dan kuantitas bisa berbeda:

- **Subsidi kepada produsen**: menurunkan harga pasar, meningkatkan kuantitas ekuilibrium
- **Subsidi kepada konsumen**: meningkatkan harga pasar, meningkatkan kuantitas ekuilibrium

Namun, dalam kedua kasus, kuantitas keseimbangan di pasar meningkat. Hal ini menandakan bahwa subsidi mendorong peningkatan aktivitas ekonomi dalam pasar terkait.

4. Efek Subsidi terhadap Konsumen dan Produsen

Subsidi menciptakan keuntungan bagi kedua pihak:

- **Konsumen**: memperoleh harga lebih rendah (atau daya beli lebih tinggi), sehingga surplus konsumen meningkat.
- **Produsen**: menjual lebih banyak barang dan mendapatkan harga efektif lebih tinggi dari pasar karena adanya subsidi, sehingga surplus produsen juga meningkat.

Dalam jangka pendek, ini menciptakan kesejahteraan ekonomi yang lebih tinggi. Namun, subsidi juga memiliki konsekuensi jangka panjang yang harus diperhitungkan.

5. Kelebihan Subsidi dalam Pasar

1. **Mendorong produksi barang strategis**: Seperti subsidi pertanian untuk menjamin ketahanan pangan nasional.
2. **Melindungi industri dalam negeri**: Subsidi bisa membuat produk lokal lebih kompetitif dibandingkan produk impor.
3. **Mengurangi beban masyarakat berpenghasilan rendah**: Seperti subsidi BBM, listrik, atau pendidikan.
4. **Mendorong inovasi**: Dalam sektor teknologi atau energi terbarukan, subsidi dapat mempercepat pengembangan inovasi yang mahal pada tahap awal.

6. Dampak Negatif dan Distorsi Pasar

Walaupun subsidi bermanfaat, kebijakan ini juga dapat menimbulkan distorsi jika tidak dikelola secara efektif:

- **Inefisiensi produksi**: Produsen mungkin tidak berusaha menurunkan biaya karena mereka bergantung pada subsidi.
- **Beban fiskal pemerintah**: Subsidi membutuhkan dana besar dari APBN, yang bisa menyebabkan defisit anggaran.
- **Overkonsumsi atau overproduksi**: Barang yang disubsidi bisa dikonsumsi secara berlebihan, bahkan jika tidak dibutuhkan.
- **Kesenjangan ekonomi**: Jika subsidi tidak tepat sasaran, justru kelompok kaya yang menikmati lebih banyak manfaat.
- **Distorsi harga pasar**: Harga tidak mencerminkan biaya sebenarnya, sehingga tidak memberi sinyal yang akurat dalam alokasi sumber daya.

7. Contoh Kasus Subsidi

Contoh klasik adalah subsidi bahan bakar minyak (BBM) di Indonesia. Pemerintah memberikan subsidi kepada perusahaan energi agar harga BBM tetap terjangkau bagi masyarakat. Dampaknya:

- Harga BBM lebih murah dibandingkan harga pasar internasional
- Permintaan BBM meningkat tajam
- Beban subsidi meningkat hingga ratusan triliun rupiah per tahun
- Menyebabkan distorsi alokasi sumber daya dan pengeluaran negara

8. Solusi dalam Implementasi Subsidi

Untuk meminimalkan dampak negatif subsidi dan memaksimalkan manfaatnya, beberapa solusi dapat diterapkan:

1. **Subsidi tepat sasaran**: Menggunakan data terverifikasi (DTKS, NIK, dll.) agar subsidi hanya diberikan kepada kelompok yang benar-benar membutuhkan.
2. **Subsidi bersyarat (conditional subsidies)**: Seperti subsidi pendidikan bagi keluarga miskin yang menyekolahkan anaknya.
3. **Penggunaan teknologi digital**: Subsidi non-tunai melalui kartu pintar atau dompet digital untuk efisiensi dan pengawasan.
4. **Pengalihan subsidi ke sektor produktif**: Misalnya dari subsidi BBM ke infrastruktur atau pendidikan.
5. **Evaluasi dan transparansi**: Pemerintah harus secara berkala mengevaluasi dampak subsidi dan menyampaikan kepada publik untuk akuntabilitas.

1.4.3. Dampak Positif dan Negatif Serta Solusi Adanya Subsidi

1.4.3.1. Dampak Positif Subsidi

1. Menurunkan Harga Barang dan Jasa

Salah satu dampak langsung dari subsidi adalah penurunan harga barang dan jasa yang disubsidi. Hal ini membuat barang tersebut lebih terjangkau bagi masyarakat, terutama kalangan menengah ke bawah. Misalnya, subsidi pada bahan bakar minyak (BBM) memungkinkan masyarakat mendapatkan energi dengan harga yang lebih murah.

2. Meningkatkan Daya Beli Masyarakat

Dengan harga barang yang lebih rendah akibat subsidi, daya beli masyarakat meningkat. Konsumen dapat memenuhi lebih banyak kebutuhan tanpa harus meningkatkan pengeluaran secara proporsional. Hal ini juga dapat mendorong konsumsi domestik dan pertumbuhan ekonomi.

3. Melindungi Industri Dalam Negeri

Subsidi kepada produsen dapat membantu sektor-sektor strategis atau yang masih berkembang untuk tetap kompetitif, khususnya menghadapi produk impor yang lebih murah. Subsidi pertanian, misalnya, membantu petani tetap mampu memproduksi meskipun harga pasar tidak stabil.

4. Mendorong Produksi dan Investasi

Dengan beban biaya produksi yang lebih rendah, subsidi dapat mendorong peningkatan output dan efisiensi di sektor-sektor tertentu. Hal ini juga dapat menarik investasi, baik dari dalam negeri maupun luar negeri, karena risiko usaha menjadi lebih rendah.

5. Mengurangi Kesenjangan Sosial

Subsidi sosial seperti bantuan langsung tunai, subsidi pendidikan, dan subsidi kesehatan membantu kelompok masyarakat miskin mendapatkan akses terhadap layanan dasar. Ini dapat meningkatkan kesetaraan sosial dan mengurangi kemiskinan.

1.4.3.2. Dampak Negatif Subsidi

1. Beban Fiskal yang Berat

Salah satu dampak utama subsidi yang tidak efisien adalah membengkaknya pengeluaran pemerintah. Subsidi yang besar dapat membebani anggaran negara dan mengurangi alokasi untuk sektor penting lainnya seperti pendidikan dan infrastruktur.

2. Subsidi Tidak Tepat Sasaran

Dalam banyak kasus, subsidi justru lebih banyak dinikmati oleh kelompok masyarakat mampu. Misalnya, subsidi BBM cenderung lebih dinikmati oleh pemilik kendaraan pribadi daripada masyarakat miskin yang tidak memiliki kendaraan.

3. Menurunkan Efisiensi Ekonomi

Ketika produsen menerima subsidi secara terus-menerus, mereka cenderung tidak terdorong untuk berinovasi atau meningkatkan efisiensi. Hal ini dapat menyebabkan ketergantungan terhadap subsidi dan inefisiensi dalam jangka panjang.

4. Distorsi Harga Pasar

Subsidi dapat menyebabkan harga pasar tidak mencerminkan biaya produksi sebenarnya. Akibatnya, alokasi sumber daya menjadi tidak optimal. Misalnya, jika harga energi disubsidi terlalu murah, masyarakat akan cenderung boros energi dan mengabaikan efisiensi.

5. Overkonsumsi dan Eksploitasi Lingkungan

Subsidi terhadap barang-barang seperti BBM atau pupuk kimia bisa mendorong overkonsumsi dan merusak lingkungan. Konsumsi yang berlebihan terhadap energi fosil misalnya, meningkatkan emisi karbon dan mempercepat perubahan iklim.

1.4.3.3. Solusi atas Permasalahan Subsidi

1. Subsidi Tepat Sasaran

Pemerintah harus mengembangkan sistem penyaluran subsidi yang berbasis data, seperti menggunakan *Data Terpadu Kesejahteraan Sosial* (DTKS) atau sistem identitas digital (NIK) agar subsidi hanya diterima oleh pihak yang benar-benar berhak. Contohnya, subsidi listrik hanya untuk rumah tangga dengan daya tertentu.

2. Subsidi Bersyarat

Pemerintah dapat menerapkan subsidi bersyarat (conditional subsidies), seperti bantuan pendidikan yang hanya diberikan kepada keluarga miskin yang anaknya bersekolah. Ini tidak hanya meringankan beban, tetapi juga mendorong perilaku produktif.

3. Pengalihan Subsidi ke Bantuan Tunai Langsung

Daripada mensubsidi harga barang, pemerintah dapat memberikan bantuan langsung tunai kepada masyarakat. Mekanisme ini lebih transparan dan memberi fleksibilitas kepada penerima untuk membelanjakan bantuan sesuai kebutuhan.

4. Penggunaan Teknologi Digital

Penyaluran subsidi dapat dilakukan secara elektronik melalui kartu pintar, rekening bank, atau dompet digital untuk meminimalkan kebocoran dan memastikan akuntabilitas. Ini juga memudahkan pelacakan dan evaluasi.

5. Evaluasi Berkala dan Reformasi Subsidi

Subsidi harus terus dievaluasi secara berkala, apakah masih relevan, efektif, dan efisien. Subsidi yang tidak berdampak signifikan terhadap peningkatan kesejahteraan masyarakat harus dikaji ulang atau dialihkan ke sektor lain yang lebih produktif.

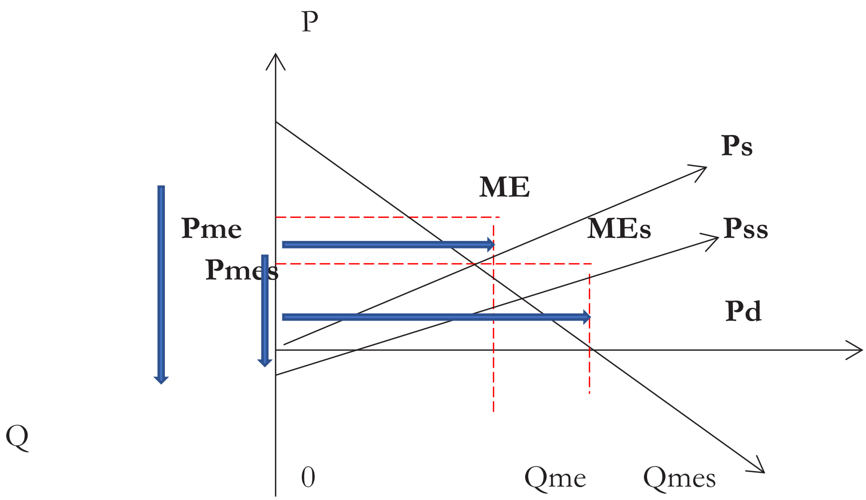
6. Pendidikan dan Literasi Masyarakat

Pemerintah perlu mengedukasi masyarakat tentang pentingnya subsidi yang efisien dan tepat sasaran. Pemahaman publik yang baik akan mengurangi tekanan politik yang sering menghambat reformasi subsidi.

Pengaruh Subsidi Terhadap Kesimbangan Pasar Subsidi (s) adalah bantuan yang diberikan pemerintah kepada produsen terhadap produk yang dihasilkan atau yang dipasarkan, sehingga harga yang berlaku di pasar lebih rendah sesuai dengan keinginan pemerintah dan daya beli masyarakat meningkat.

Fungsi penawaran setelah subsidi adalah $F(Q) = P + S$ atau $P = F(Q) - S$. Keseimbangan pasar sebelum subsidi adalah $Qd = Qs$ atau $Pd = Ps$. Keseimbangan pasar setelah subsidi adalah $Pd = Pss$. Subsidi untuk konsumen adalah $Sk = (Pd - Ps) \times Qs$.

Subsidi yang diberikan oleh pemerintah adalah SG = s x Qs.
Dan subsidi untuk produsen adalah SP = s – (Pd – Ps) x Qs



Contoh 1:
Jika fungsi permintaan akan suatu komoditas adalah Qd = 12 – 2P sedangkan besarnya fungsi penawaran Qs = - 4 + 2 P.
Dan subsidi yang diberikan pemerintah adalah sebesar Rp 2 setiap unit barang yang di produksi.
Tentukan:

a. Berapakah jumlah dan harga barang keseimbangan pasar sebelum subsidi
b. Berapakah jumlah dan harga keseimbangan pasar setelah subsidi
c. Berapakah besar subsidi yang dinikmati konsumen
d. Berapakah besar subsidi yang dinikmati produsen
e. Berapakah subsidi yang ditanggung oleh pemerintah
f. Gambarkan

Jawab:

Cara I :

a. $Qd = 12 - 2P$ $\qquad$ $Qs = -4 + 2P$

$2P = 12 - Q$ $\qquad$ $Q + 4 = 2P$

$Pd = 6 - \frac{1}{2} Qd$ $\qquad$ $Ps = 2 + \frac{1}{2} Qs$

Keseimbangan pasar sebelum subsidi : Pd = Ps

$$6 - \tfrac{1}{2} Qd = 2 + \tfrac{1}{2} Qs$$

$$6 - 2 = \tfrac{1}{2} Q + \tfrac{1}{2} Q$$

$$Q = 4$$

Q = 4 substitusi ke $Pd = 6 - \frac{1}{2} Q$

$$P = 6 - \tfrac{1}{2} (4) = 4.$$

Maka keseimbangan pasar sebelum ada subsidi adalah = (Q, P) = (4 , 4).

b. Keseimbangan pasar setelah ada subsidi: Pd = Ps – S

$$6 - \tfrac{1}{2} Qd = 2 + \tfrac{1}{2} Qs - 2$$

$$6 - \tfrac{1}{2} Qd = \tfrac{1}{2} Qs$$

$$6 = \tfrac{1}{2} Q + \tfrac{1}{2} Q$$

$$Q = 6$$

Q = 6 substitusi ke $Pd = 6 - \frac{1}{2} Q$

$$P = 6 - \tfrac{1}{2} (6) = 3$$

Maka keseimbangan pasar setelah ada subsidi adalah = (Q, P) = (6 , 3).

c. Besar subsidi yang dinikmati konsumen : sk = Pd – Ps

$$sk = 4 - 3 = 1$$

Total subsidi yang dinikmati konsumen : Sk = (Pd – Ps) x Qs

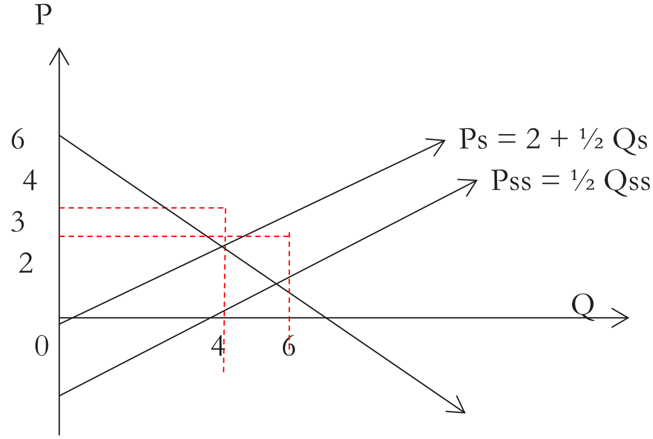
$$Sk = (4 - 3) \times 6 = 6$$

d. Berapakah besar subsidi yang dinikmati produsen :

$$sp = S - (Pd - Ps) \times Qs$$
$$sp = (2 - (4 - 3)) \times 6 = 6$$
$$sp = (2 - 1) \times 6 = 6$$

e. Subsidi yang diberikan oleh pemerintah SG = S x Qs = 2 x 6 = 12

f. Gambar grafik:



Cara II:

ME = (4 , 4) sk = 4 – 3 = 1 (½ x 100% = 50%)

MEs = (6 , 3) sp = 2 – 1 = 1 (100% - 50% = 50%)

Besar subsidi yang dinikmati konsumen = Rp 1 atau 50%
Total subsidi yang dinikmati konsumen = Rp 1 x 6 = Rp 6
Berapakah besar subsidi yang dinikmati produsen = Rp 1 atau 50%
Total subsidi yang dinikmati produsen = Rp 1 x 6 = Rp 6

1.5. Fungsi biaya, fungsi pendapatan dan analisa break event point serta grafik

1.5.1. Fungsi Biaya

Pengertian Biaya dalam Ekonomi

Dalam ilmu ekonomi dan bisnis, biaya (cost) adalah pengorbanan sumber daya yang diukur dalam satuan uang untuk memperoleh barang atau jasa. Biaya merupakan elemen penting dalam pengambilan keputusan produksi, penetapan harga, analisis keuntungan, dan efisiensi operasional.

Secara umum, biaya mencerminkan nilai alternatif terbaik yang dikorbankan ketika suatu pilihan diambil. Dengan kata lain, biaya mencerminkan apa yang harus dilepaskan demi memperoleh sesuatu.

Jenis-Jenis Biaya

1. Biaya Eksplisit (Explicit Cost)

Biaya eksplisit adalah pengeluaran nyata yang dikeluarkan oleh perusahaan, biasanya dalam bentuk uang. Contohnya meliputi:

- Gaji karyawan
- Pembelian bahan baku
- Sewa gedung
- Tagihan listrik dan air
- Pajak

Biaya ini tercatat secara resmi dalam laporan keuangan dan digunakan dalam menghitung laba akuntansi.

2. Biaya Implisit (Implicit Cost)

Biaya implisit adalah biaya kesempatan (opportunity cost) dari sumber daya yang dimiliki dan digunakan oleh perusahaan, tanpa pembayaran secara langsung. Misalnya:

- Gaji pemilik yang tidak diambil
- Penggunaan gedung milik sendiri

- Waktu kerja yang bisa digunakan untuk usaha lain

Biaya ini digunakan dalam perhitungan laba ekonomi.

3. Biaya Tetap (Fixed Cost)

Biaya tetap (FC) adalah biaya yang jumlah totalnya tetap dalam kisaran volume kegiatan tertentu. Dengan kata lain biaya yang jumlahnya tetap meskipun volume kegiatan (produksi) berubah-ubah.

Contoh biaya tetap adalah: biaya untuk membayar pakar kimia makanan, biaya sewa tempat penjualan, dan biaya penyusutan alat-alat produksi. Jika digambarkan dalam diagram cartesius dimana sumbu tegak adalah jumlah biaya (Rp) dan sumbu mendatar adalah volume produksi (Q) maka garis biaya tetap (FC) berupa garis lurus horisontal.

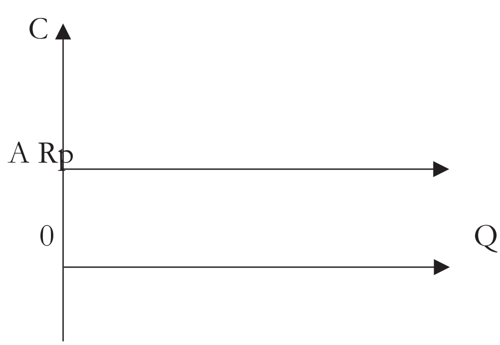
Biaya tetap adalah biaya yang tidak berubah meskipun tingkat produksi berubah. Contohnya:

- Sewa bangunan
- Asuransi
- Gaji manajemen tetap

Biaya ini tetap harus dibayar walaupun produksi nol.

FC =

Fiixed Cost



Dari gambar di atas terlihat bahwa jika perusahaan tidak berproduksi akan tetap menanggung biaya sebesar A Rp.

4. Biaya Variabel (Variable Cost)

Biaya variabel adalah biaya yang berubah sesuai dengan volume produksi. Semakin tinggi produksi, semakin tinggi biaya ini. Contohnya:

- Biaya bahan baku
- Upah tenaga kerja borongan
- Biaya listrik untuk produksi

5. Biaya Total (Total Cost)

Merupakan penjumlahan dari biaya tetap dan biaya variabel: TC = FC + VC

6. Biaya Rata-rata (Average Cost)

Biaya total dibagi dengan jumlah unit yang diproduksi: AC = TC / Q

7. Biaya Marjinal (Marginal Cost)

Tambahan biaya yang muncul ketika memproduksi satu unit tambahan:
MC = ΔTC / ΔQ

Biaya marjinal sangat penting dalam pengambilan keputusan produksi, khususnya untuk menentukan titik efisiensi dan output optimal.

Biaya dalam Perspektif Ekonomi Mikro dan Makro

Ekonomi Mikro

Dalam ekonomi mikro, biaya digunakan untuk menganalisis perilaku perusahaan dalam produksi dan penetapan harga. Beberapa aplikasi biaya dalam mikroekonomi:

- Menentukan harga jual
- Menentukan jumlah produksi optimal

- Meminimalkan biaya produksi
- Menentukan kelayakan investasi

Ekonomi Makro

Dalam ekonomi makro, biaya digunakan dalam konteks lebih luas seperti:

- Biaya sosial dari pengangguran
- Biaya inflasi
- Biaya subsidi pemerintah
- Biaya pembangunan infrastruktur

Konsep Biaya Kesempatan (Opportunity Cost)

Biaya kesempatan adalah nilai dari alternatif terbaik yang dikorbankan saat suatu pilihan diambil. Konsep ini sangat penting dalam ekonomi karena semua sumber daya terbatas.

Contoh:

Jika seorang petani memilih menanam padi, maka biaya kesempatannya adalah keuntungan yang hilang karena tidak menanam jagung.

Biaya dan Skala Produksi

Dalam jangka panjang, hubungan biaya dan skala produksi dapat dibedakan menjadi:

- **Skala Ekonomi (Economies of Scale):** Biaya per unit menurun saat volume produksi meningkat.
- **Skala Tidak Ekonomi (Diseconomies of Scale):** Biaya per unit meningkat jika produksi melebihi kapasitas efisien.
- **Skala Konstan (Constant Returns to Scale):** Biaya per unit tetap meski skala produksi meningkat.

Peran Biaya dalam Pengambilan Keputusan Bisnis

Manajer atau pemilik usaha menggunakan informasi biaya untuk:

1. **Menentukan Harga Produk:** Harga harus cukup tinggi untuk menutupi biaya dan menghasilkan laba.
2. **Analisis Titik Impas (Break-Even Analysis):** Menentukan kapan total pendapatan sama dengan total biaya.
3. **Pengendalian Biaya:** Menekan biaya produksi agar lebih efisien.
4. **Evaluasi Proyek:** Menentukan apakah proyek investasi menguntungkan berdasarkan biaya dan manfaat.

Contoh Perhitungan Biaya

Misal:

- Biaya tetap (FC) = Rp10.000.000
- Biaya variabel per unit = Rp5.000
- Jumlah unit yang diproduksi = 2.000 unit

Maka:

- **Total Biaya Variabel (VC)** = 2.000 × Rp5.000 = Rp10.000.000
- **Total Biaya (TC)** = FC + VC = Rp10.000.000 + Rp10.000.000 = Rp20.000.000
- **Biaya Rata-Rata (AC)** = TC / Q = Rp20.000.000 / 2.000 = Rp10.000
- **Biaya Marjinal (misal tambahan 1 unit = biaya tambahan Rp5.000)**
  → MC = Rp5.000

Masalah dan Tantangan dalam Pengelolaan Biaya

1. **Kenaikan Harga Bahan Baku:** Menyebabkan biaya variabel meningkat dan menekan margin keuntungan.
2. **Inefisiensi Operasional:** Penggunaan sumber daya yang tidak optimal meningkatkan biaya tetap dan variabel.

3. **Ketergantungan pada Pihak Ketiga:** Jika proses penting diserahkan ke vendor luar, perusahaan harus membayar tambahan biaya.
4. **Fluktuasi Kurs dan Inflasi:** Dalam bisnis ekspor-impor, nilai tukar dapat memengaruhi biaya impor bahan baku.

Solusi Mengelola Biaya Secara Efisien

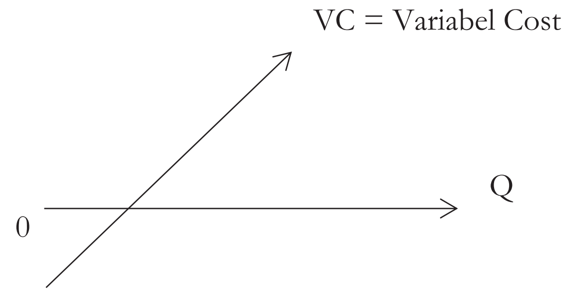
1. **Analisis Biaya-Manfaat (Cost-Benefit Analysis):** Mengevaluasi apakah pengeluaran biaya memberikan manfaat yang sepadan.
2. **Penganggaran dan Perencanaan:** Menyusun anggaran biaya yang realistis untuk mengontrol pengeluaran.
3. **Teknologi dan Otomatisasi:** Mengganti proses manual dengan sistem otomatis dapat mengurangi biaya jangka panjang.
4. **Outsourcing:** Jika lebih murah dan efisien, sebagian proses produksi dapat dialihkan ke pihak ketiga.
5. **Pelatihan SDM:** Peningkatan produktivitas karyawan dapat menekan biaya tenaga kerja per unit.

Fungsi biaya merupakan hubungan antara biaya dengan jumlah produksi yang dihasilkan, fungsi biaya dapat digambarkan ke dalam kurva dan kurva biaya menggambarkan titik-titik kemungkinan besarnya biaya diberbagai tingkat produksi.
Selain pengertian biaya tetap, biaya variabel dan biaya total, dalam konsep biaya dikenal pula pengertian biaya rata-rata (average cost) dan biaya marginal (marginal cost).
Biaya rata-rata adalah biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk atau keluaran, merupakan hasil bagi biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan.
Adapun biaya marginal ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

Dari gambar di atas terlihat bahwa jika perusahaan tidak berproduksi akan tetap menanggung biaya sebesar A Rp.

1.5.1.2. Fungsi Biaya Variable (Variable Cost)

Biaya variabel adalah biaya yang jumlah totalnya berubah sebanding dengan perubahan volume kegiatan. Semakin banyak barang yang diproduksi, biaya variabel akan meningkat sebanding dengan peningkatan jumlah produksi.
Contoh biaya variabel adalah : biaya bahan baku, biaya bahan pembungkus (kemasan) dan label. Jika digambarkan dalam diagram cartesius maka garis biaya variabel (VC) berupa garis lurus ke kanan atas(kemiringan / gradien positif).



Dari gambar di atas terlihat bahwa jika perusahaan tidak berproduksi maka tidak mengeluarkan biaya variable.

1.5.1.3. Fungsi Biaya Total (Total Cost)

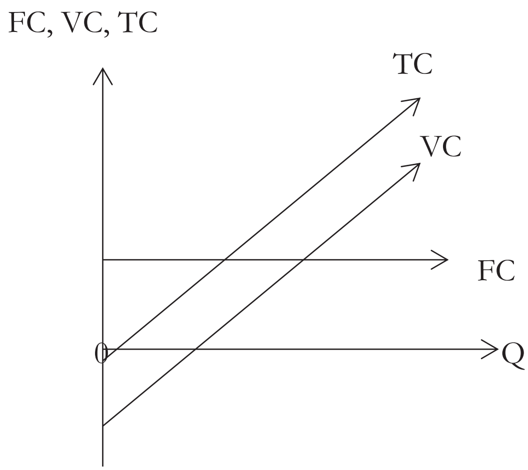
Biaya total adalah hasil dari penjumlahan biaya tetap dengan biaya variabel, atau dengan persamaan matematis sebagai:

$$TC = FC + TVC$$

atau

$$TC = FC + VC.Q$$

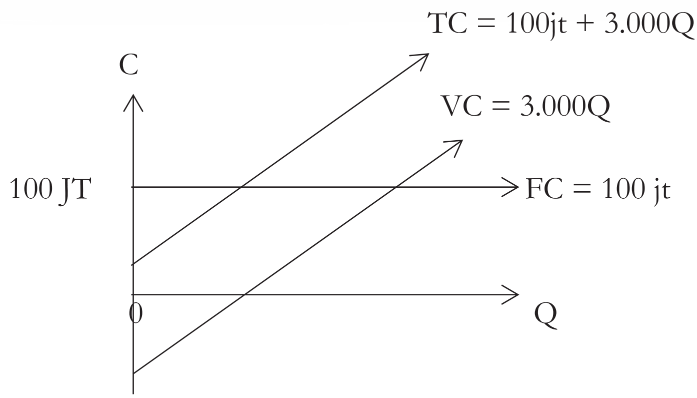
Jika digambarkan dalam diagram cartesius maka garis biaya total (TC), merupakan gabungan dari garis biaya tetap (FC) dengan garis total biaya variabel (TVC) yaitu berupa garis lurus ke kanan atas (kemiringan positif) dengan titik awal tidak pada titik (0,0) tetapi dimulai dari biaya tetap.



Contoh 1 :
Sebuah perusahaan mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp 100.000.000 dan biaya variabelnya 3000Q
Tentukan fungsi biayanya ?
Gambarkan grafik fungsinya ?
Jawab :

$$TC = 100.000.000 + 3.000Q$$

Gambar grafik fungsinya:



Contoh 2:

Diketahui : $FC = 20.000$, $VC = 100\,Q$

Ditanyakan : Tunjukkan persamaan dan kurva totalnya !

Berapa biaya total yang dikeluarkan jika diproduksi 500 unit barang ?

Jawab :

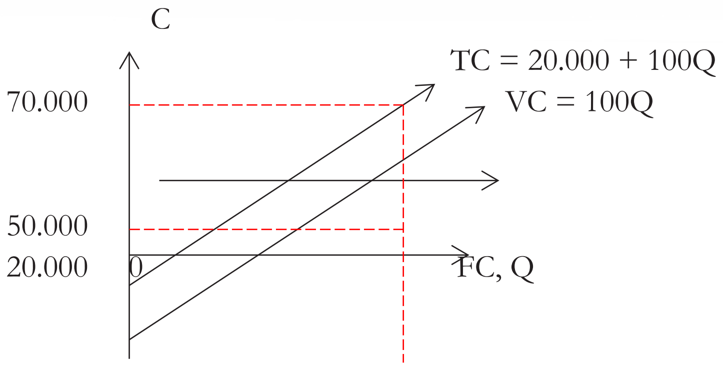
TC = FC + VC

TC = 20.000 + 100Q

Jika Q = 500, maka TC = 20.000 + 100 (500)

TC = 70.000

Biaya total jika memproduksi 500 unit adalah 70.000

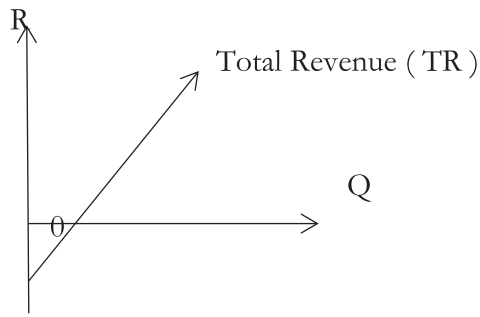


1.5.1.4. Pendapatan

Pendapat adalah jumlah keseluruhan hasil yang diterima dari penjualan produk, yaitu harga jual per unit (P) dikalikan dengan kuantitas penjualan (Q), atau dengan pendekatan matematis sebagai :

$$TR = PxQ.$$

Jika digambarkan dalam diagram cartesius maka garis pendapatan (TR) berupa garis lurus ke kanan atas (kemiringan / gradien positif).



Contoh 1:

Harga jual produk yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan Rp. 200,00 per unit. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan ini !

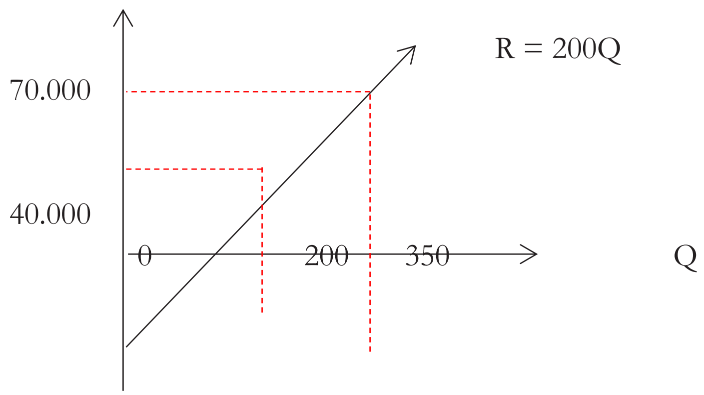
Berapa besar penerimaannya bila terjual barang sebanyak 350 unit ?

Jawab :

$R = PxQ = 200xQ = 200\,Q$

Bila $Q = 350$, maka ; $R = 200 \times 350 = 70.000$

R



1.5.1.5. Analisa Break Event Point

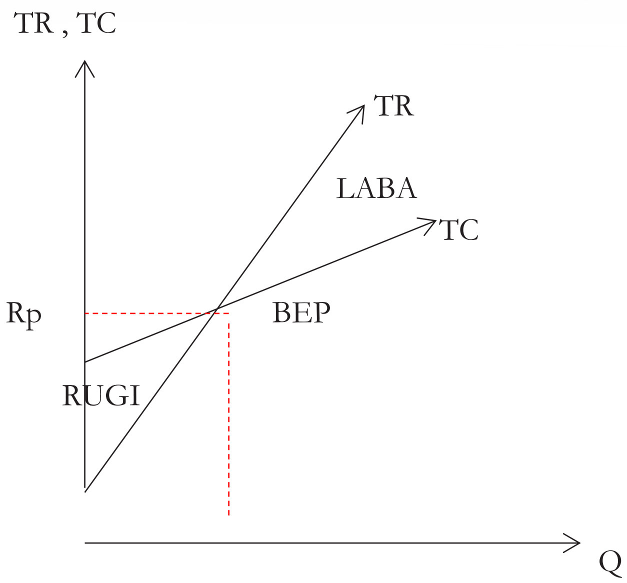
Break even point (BEP) atau titik impas merupakan teknik untuk mengevaluasi berbagai alternatif proses dari pendapatan dan biaya, tujuannya adalah untuk menemukan titik pertemuan di mana jumlah biaya sama dengan jumlah pendapatan,

Break even analisis membutuhkan estimasi biaya tetap, biaya variabel, dan pendapatan.

Break even, atau impas, atau pulang pokok adalah suatu keadaan perusahaan yang pendapatannya sama dengan jumlah total biayanya, dengan kata lain perusahaan tidak memperoleh laba tetapi juga tidak menderita rugi atau laba rugi sama dengan nol.

Untuk menentukan titik impas dapat dilakukan dengan menggunakan dua pendekatan yaitu pendekatan grafik dan matematis.

Pendekatan grafik diperoleh dengan mencari titik potong antara grafik penerimaan total (TC) dengan grafik biaya total (TC) sebagai berikut:



Pendekatan Matematis :

Perhitungan analisa impas *(Break Even)* didasarkan oleh persamaan matematis sebagai berikut:

Pendapatan = Total Biaya

TR = TC

TR = FC + TVC

P X Q = FC + (VC X Q)

Keterangan:

TR = Total Revenue (Pendapatan Total)

TC = Total Cost (Biaya Total)

FC = Fixed Cost (Biaya Tetap)

VC = Variable Cost (Biaya Variabel) per unit

Q = Quantity (jumlah produk penjualan)

P = Price (Harga jual barang) per unit

Contoh 1 :

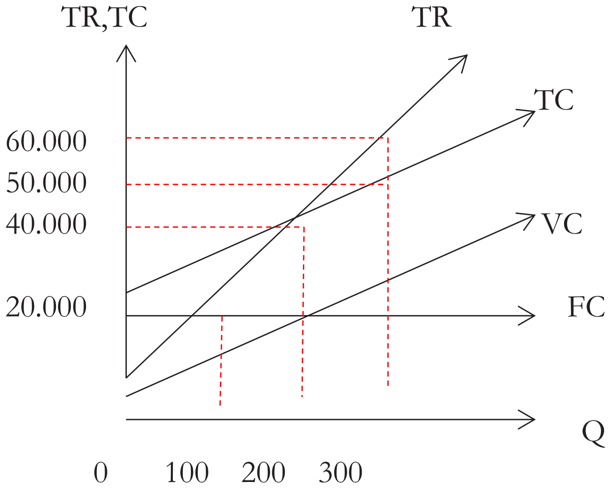
Diketahui : $C = 20.000 + 100\,Q$,

$R = 200\,Q$

Ditanyakan : Berapakah tingkat produksi pada saat *BEP* ?
Apa yang terjadi pada saat produksinya sebanyak 300 unit ?
Jawab :

$$\text{BEP jika } TR = TC$$
$$200\,Q = 20.000 + 100\,Q$$
$$200Q - 100Q = 20.000$$
$$100\,Q = 20.000$$
$$Q = 200$$
$$\text{jika } Q = 300, \text{ maka :}$$
$$TR = 200\,(300) = 60.000$$
$$TC = 20.000 + 100\,(300) = 50.000$$

Keuntungan ; $\Pi = TR - TC$
$$\Pi = 60.000 - 50.000$$
$$\Pi = 10.000$$



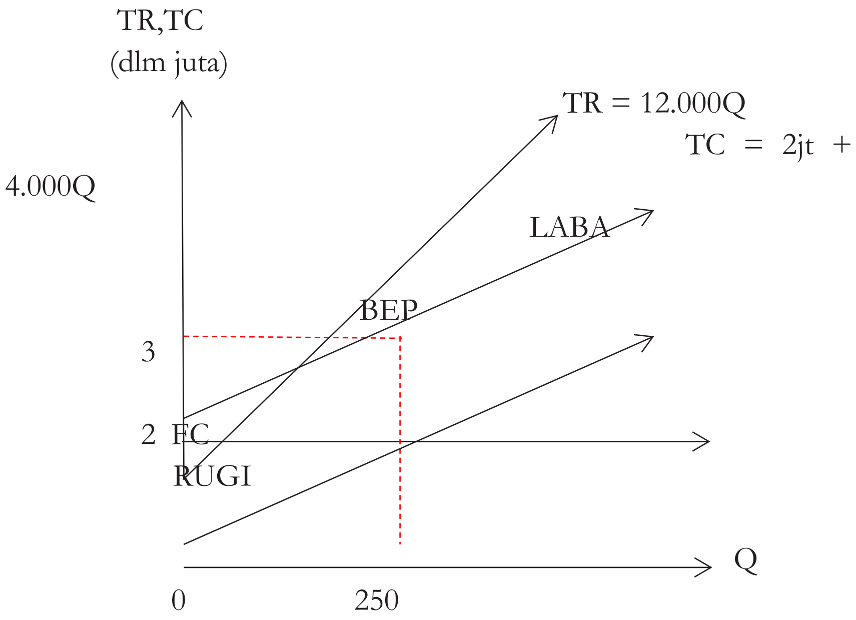
Contoh 2 :
Suatu perusahaan menghasilkan produknya dengan biaya variabel perunit Rp4.000 dan harga jualnya perunit Rp12.000.
Manajemen menetapkan bahwa biaya tetap dari operasinya Rp2.000.000.

Tentukan jumlah unit produk yg harus perusahaan jual agar mencapai pulang pokok

Jawab :

$$TR = TC$$
$$12000Q = 2.000.000 + 4000Q$$
$$8000Q = 2.000.000$$
$$Q = 2.000.000/8.000$$
$$Q = 250$$
$$TR = 12.000Q$$
$$TR = 12.000(250)$$
$$TR = 3.000.000$$

Perusahaan pulang pokok jika memproduksi sebanyak 250 unit dengan total penerimaan sebesar Rp 3.000.000.



1.5.1.6. Fungsi pendapatan nasional, fungsi konsumsi, fungsi tabungan dan keseimbangan pendapatan nasional

Fungsi Konsumsi diperkenalkan pertama kalinya oleh John M. Keynes.

Fungsi konsumsi mempunyai beberapa asumsi, yaitu:

1. Terdapat sejumlah konsumsi mutlak tertentu untuk mempertahankan hidup walaupun tidak mempunyai pendapatan.
2. Konsumsi berhubungan dengan pendapatan yang siap dibelanjakan. (C=f(Yd))
3. Jika pendapatan yang siap dibelanjakan meningkat, maka konsumsi juga akan meningkat walaupun dalam jumlah yang lebih sedikit.
4. Proporsi kenaikan pendapatan yang siap dibelanjakan untuk konsumsi adalah konstan.

(*MPC=Marginal Propensity to Consume* = konstan)

Berdasarkan asumsi tersebut persamaan fungsi konsumsi adalah:

$$C = a + bY$$

Dimana:

C= Konsumsi

Y= Pendapatan yang siap dibelanjakan

a= Konsumsi mutlak

b= Kecenderungan konsumsi marginal (MPC)

Fungsi tabungan dapat diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan di atas dalam persamaan pendapatan: $Y = C + S$ sehingga menghasilkan:

$$Y = (a + bY) + S$$
$$S = Y - (a + bY)$$
$$S = -a + (1-b)Y$$

Dimana :

S = Tabungan

- a = Tabungan negatif bila pendapatan sama dengan nol.

(1-b) = Kecendrungan menabung marginal (MPS)

$$MPS+MPC=1$$

Pendapatran Nasional adalah Jumlah seluruh nilai output (barang dan jasa) yang dihasilkan oleh suatu negara selama jangka waktu tertentu.

Perhitungan pendapatan nasional dilakukan dengan 3 macam pendekatan:

1. pendekatan produksi,
2. pendekatan pendapatan, dan
3. pendekatan pengeluaran.

Dari segi pendekatan pengeluaran, pendapatan nasional adalah jumlah pengeluaran oleh seluruh sektor di suatu negara.

Sektor-sektor perekonomian tersebut adalah:

- Sektor rumah tangga dicerminkan oleh konsumsi masyarakat (C)
- Sektor badan usaha dicerminkan oleh investasi yang dilakukan oleh badan-badan usaha (I)
- Sektor pemerintah dicerminkan oleh pengeluaran pemerintah (G)
- Sektor perdagangan internasional dicerminkan oleh selisih antara ekspor dan impor negara tersebut (X -M)

Jadi pendapatan nasional:

Y = C + I untuk perekonomian 2 sektor

Y = C + I + G untuk perekonomian 3 sektor

Y = C + I + G + (X – M) untuk perekonomian 4 sektor (model perekonomian terbuka)

Contoh 1:

Negara Adidaya bermaksud untuk menghitung besarnya pendapatan nasional negara tersebut dengan menggunakan pendekatan pengeluaran. Diketahui beberapa data dari negara Adidaya sebagai berikut: (dalam milyar rupiah)

- Sewa tanah: 15.000
- Konsumsi: 54.000
- Upah: 26.000
- Pengeluaran pengusaha: 16.000
- Ekspor: 9.000
- Impor: 4.000
- Keuntungan: 5.000
- Ekspor netto 5.000
- Pengeluaran pemerintah: 15.000

Dari data tersebut, besarnya pendapatan nasional negara Adidaya adalah…

Jawab :

Y = C + I + G + Ekspor netto

Y = 54.000 + 16.000 + 15.000 + 5000

Y = 90.000 milyar rupiah.

Contoh 2 :

Diketahui data perekonomian suatu Negara seperti berikut (dalam triliun):

Pengeluaran konsumsi : 125

Tingkat investasi : 150

Pengeluaran pemerintah : 130

Nilai ekspor : 225

Nilai impor : 170

Tentukan besar pendapatan Negara tersebut !

Jawab :

Y = C + I + G + (X – M)

Y = 125 + 150 + 130 + (225 – 170)

Y = 460 triliun.

Contoh 3 :

Diketahui data perekonomian suatu Negara sebagai berikut (dalam Triliun rupiah):

Hasil sewa	: 3.500
Pengeluaran pemerintah	: 2.750
Konsumsi masyarakat	: 3.000
Gaji/upah	: 1.000
Harga barang	: 250
Pendapatan bunga	: 2.800
Investasi	: 1.250
Ekspor	: 1.500
Laba pengusaha	: 1.300

Jika pendapatan nasional dengan pendekatan pengeluaran adalah 8.000 triliun,

tentukan nilai impor Negara tersebut !

Jawab :

$Y = C + I + G + (X - M)$

$Y = C + I + G + X - M$

$M = (C + I + G + X) - Y$

$M = (3.000 + 1.250 + 2.750 + 1.500) - 8.000$

$M = 8.500 - 8.000 = 500$ Triliun Rupiah.

MATERI IV

Differensial

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut :

1. Mahasiswa mampu memahami penggunaan fungsi Differensial fungsi satu variabel,
2. Mahasiswa dapat memahami rumus dan aturan-aturan Differensial. Serta mendifferensialkan fungsi satu variable, differensial pertama, ke dua dst
3. Mahasiswa mampu menentukan optimisasi fungsi yang differensiabel, menentukan Nilai maksimum, nilai minimum ataupun titik belok fungsi
4. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep Differensial dua variabel atau lebih
5. Mahasiswa dapat mendifferensialkan fungsi dua variabel atau lebih secara parsial dan total
6. Mahasiswa dapat menentukan nilai optimum suatu Fungsi Dua atau lebih Variable Bebas dengan fungsi kendala

B. Materi Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda akan memahami:

1. Penggunaan fungsi Differensial fungsi satu variabel,
2. Rumus dan aturan-aturan Differensial. Serta mendifferensialkan fungsi satu variable, differensial pertama, ke dua dst
3. Penentuan optimisasi fungsi yang differensiabel, menentukan Nilai maksimum, nilai minimum ataupun titik belok fungsi
4. Konsep Differensial dua variabel atau lebih

5. Pendifferensialan fungsi dua variabel atau lebih secara parsial dan total
6. Nilai optimum suatu Fungsi Dua atau lebih Variable Bebas dengan fungsi kendala

1. Derivatif/ Differensial/Turunan

Persamaan Diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variable terikat terhadap satu atau lebih variable bebas suatu fungsi(Lestari, 2013).

Notasi atau cara penulisan Persamaan Diferensial antara lain(Nuryadi, 1375):

1. **Notasi Leibniz**

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

2. **Notasi Pangkat**

$$y^I, \; y^{II}, \; y^{III}, \; y^{(4)}, \; y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$$

Rumus 1 : $\boldsymbol{y = c \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0}$

Keterangan : c adalah konstanta

Contoh:

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

1. y = 1
2. y = - 3
3. y = ½

jawab :

1. y = 1 maka $\frac{dy}{dx} = 0$
2. y = - 3 maka $\frac{dy}{dx} = 0$
3. y = ½ maka $\frac{dy}{dx} = 0$

Rumus 2 : $\boldsymbol{y = ax^b} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = a.b\,x^{b-1}}$

Keterangan : a, b adalah konstanta
x adalah variabel

Contoh :

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

1. $y = 2x^3$
2. $y = x^3$
3. $y = 5x$
4. $y = x$

jawab :

1. $y = 2x^3 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2.3\,x^{3-1} = 6x^2$
2. $y = x^3 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1.3\,x^{3-1} = 3x^2$
3. $y = 5x = 5x^1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 5.1\,x^{1-1} = 5x^0 = 5.1 = 5$
4. $y = x = 1x^1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1.1\,x^{1-1} = 1x^0 = 1.1 = 1$

Contoh penggabungan rumus 1 dan 2 .

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

1. $y = 7x + 5$
2. $y = 3x^2 + 1$
3. $y = 2x^3 + x^2 - 5x - 12$

jawab :

1. $y = 7x + 5 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 7 + 0 = 7$
2. $y = 3x^2 + 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6x + 0 = 6x$
3. $y = 2x^3 + x^2 - 5x - 12 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x - 5 - 0$

$$\leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x - 5$$

Rumus 3 : $\boldsymbol{y = au^b} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = a.b\, u^{b-1}}$

Keterangan : a, b adalah konstanta

u adalah fungsi dari f(x)

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

1. $y = 7(x + 8)^2$
2. $y = 5(2x + 1)^3$
3. $y = 2(3x + 10)^7$
4. $y = 4(2x^2 + 5x - 12)^8$

jawab :

1. $y = 7(x + 8)^2$

Cara I:

Misalkan u = x + 8

du = 1 dx

du = dx

Maka persamaan dalam y berubah menjadi $y = 7u^2$

dy = 14u du

dy = 14 (x + 8) . 1 dx

dy = 14 (x + 8) dx

$$\frac{dy}{dx} = 14\,(x + 8) \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 14x + 112$$

Cara II:

Cara ini menggunakan aturan segitiga pascal

			1				$(a + b)^0 = 1$
		1		1			$(a + b)^1 = a + b$
	1		2		1		$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1		3		3		1	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1. $y = 7(x+8)^2 \quad \leftrightarrow \quad y = 7\,(\,x^2 + 16x + 64\,)$

$$y = 7x^2 + 112x + 448$$

$$\frac{dy}{dx} = 14x + 112 + 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 14x + 112$$

Cara III: Cara langsung

Cara langsung dilakukan dengan cara , menurunkan terhadap pangkat terlebih dahulu kemudian dikali turunan yang dalam kurung.

1. $\boldsymbol{y = 7(x+8)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 7.2(x+8)^{2-1}.\,d(x+8) = 7.2\,(x+8)^{2-1}.\,1$$

$$\frac{dy}{dx} = 14.1\,(x+8)^1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 14(x+8)$$

$$= \;14x + 112$$

2. $y = 5(2x+1)^3$

Cara I :

Misalkan u = 2x + 1

du = 2 dx

Maka persamaan dalam y berubah menjadi $y = 5u^3$

dy = $15u^2$ du

dy = $15\,(2x+1)^{2.2dx}$

dy = 30 $(2x+1)^2\,dx$

$$\frac{dy}{dx} = 30(2x+1)^2$$

Cara II :

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. $y = 5(2x+1)^3 \;\leftrightarrow\; y = 5\,[(2x)^3 + 3.(2x)^{2.1} +$
   $3.(2x).\ 1^2 + 1^3]$

$y = 5[8x^3 + 3.4x^{2.1} + 6x + 1] \;\leftrightarrow\; y = 5\,[8x^3 +$
$12x^2 + 6x + 1]$

$y = 40x^3 + 60x^2 + 30x + 5$

$\frac{dy}{dx} = 120x^2 + 120x + 30 + 0 \;\leftrightarrow\; \frac{dy}{dx}$
$= 120x^2 + 120x + 30$

Cara III : Cara langsung

Cara langsung dilakukan dengan cara , menurunkan terhadap pangkat terlebih dahulu kemudian dikali turunan yang dalam kurung.

2. $\boldsymbol{y = 5(2x+1)^3}$

$$\frac{dy}{dx} = 5.3(2x+1)^{3-1}.\,d(2x+1) = 5.3\,(2x+1)^{3-1}.\,2$$

$$\frac{dy}{dx} = 15.2\,(2x+1)^2 \;\leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = 30(2x+1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 30\,(4x^2 + 4x + 1) \;\leftrightarrow\; \frac{dy}{dx}$$
$$= 120x^2 + 120x + 30$$

3. $\boldsymbol{y = 2(3x+10)^7}$

Cara I :

Misalkan u = 3x + 10

du = 3 dx

Maka persamaan dalam y berubah menjadi $y = 2u^7$

dy = $14u^6$ du

dy = $14\ (3x+10)^{6.3dx}$

dy = 42 $(3x+10)^6\ dx$

$$\frac{dy}{dx} = 42(3x+10)^6$$

Cara II:

Cara II dengan menggunakan segitiga pascal pada kasus ini terlalu rumit untuk dilakukan, maka rumus pemisalan di atas sangat efektif digunakan.

Cara III: Cara langsung

Cara langsung dilakukan dengan cara , menurunkan terhadap pangkat terlebih dahulu kemudian dikali turunan yang dalam kurung.

$$3.\ y = 2(3x+10)^7$$

$$\frac{dy}{dx} = 2.7(3x+10)^{7-1}.\ d(3x+10)$$

$$= 2.7\ (3x+10)^{7-1}.\ 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 14.3\ (3x+10)^6 \ \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 42(3x+10)^6$$

4. $\boldsymbol{y = 4(2x^2+5x-12)^8}$

Misalkan u = $2x^2 + 5x - 12$

du = $(4x + 5)$dx

Maka persamaan dalam y berubah menjadi $y = 4u^8$

dy = $32u^7$ du

dy = $32(2x^2+5x-12)^7(4x+5)dx$

dy = (128x + 160) $(2x^2+5x-12)^7$dx

$$\frac{dy}{dx} = (128x+180)(2x^2+5x-12)^7$$

Cara III: Cara langsung

Cara langsung dilakukan dengan cara , menurunkan terhadap pangkat terlebih dahulu kemudian dikali turunan yang dalam kurung.

4. $y = 4(2x^2 + 5x - 12)^8$

$$\frac{dy}{dx} = 4.8(2x^2 + 5x - 12)^{8-1}.d(2x^2 + 5x - 12)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4.8\,(2x^2 + 5x - 12)^{8-1}.(4x + 5)$$

$$\frac{dy}{dx} = 32.(4x + 5)(2x^2 + 5x - 12)^7$$

$$\frac{dy}{dx} = (128x + 180)(2x^2 + 5x - 12)^7$$

Rumus 4: $\boldsymbol{y = u.v \;\leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = u.dv + v.du \;\leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = v.du + u.dv}$

Keterangan : u , v adalah fungsi dari f(x)

du adalah turunan dari fungsi dari u

dv adalah derivative dari fungsi dari v

Contoh:

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari:

9. y = (x + 2)(x – 3)
10. y =(2x – 1)$(x + 5)^2$
11. $y = (3x + 2)^3(2x - 1)^4$
12. $y = (12 - 3x)^2(5 + 4x)^3$

jawab :

1. $y = (x - 1)(x - 3)$

Cara I:

y = (x – 1)(x – 3) = x^2 – 3x -x + 3 = x^2 – 4x +3

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

Cara II:

$1. y = (x - 1)(x - 3)$

Misal , u = x – 1 maka du = 1

v = x – 3 maka dv = 1

$$\frac{dy}{dx} = u.dv + v.du \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (x - 1).1 + (x - 3).1$$

$$\frac{dy}{dx} = x - 1 + x - 3 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

jawab:

$2. y = (2x - 1)(x + 5)^2$

Cara I:

$$y = (2x - 1)(x + 5)^2 = (2x - 1)(x^2 + 10x + 25)$$

$$y = 2x^3 + 20x^2 + 50x - x^2 - 10x - 25$$

$$y = 2x^3 + 19x^2 + 40x - 25$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 38x + 40 - 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 38x + 40$$

Cara II :

Missal , u = 2x – 1 maka du = 2

V = $(x + 5)^2$ maka dv = 2(x + 5)^1 . 1

dv = 2x + 10

$$\frac{dy}{dx} = u.dv + v.du \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}$$

$$= (2x - 1).(2x + 10) + (x + 5)^{2.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 1).(2x + 10) + 2(x + 5)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 1).2(x + 5) + 2(x + 5)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x-1).(x+5) + 2(x+5)^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(x+5)[(2x-1)+(x+5)]$$
$$\frac{dy}{dx} = (2x+10)[2x-1+x+5]$$
$$\frac{dy}{dx} = (2x+10)(3x+4)$$

jawab :

3. $y = (3x+2)^3(2x-1)^4$

Misal, $u = (3x+2)^3$ maka $du = 3.(3x+2)^{2.3} = 9(3x+2)^2$

$v = (2x-1)^4$ maka $dv = 4.(2x-1)^{3.2} = 8(2x-1)^3$

$$\frac{dy}{dx} = u.dv + v.du$$
$$\frac{dy}{dx} = (3x+2)^{3.8(2x-1)^3} + (2x-1)^{4.9(3x+2)^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = (3x+2)^2(2x-1)^3[8(3x+2)+9(2x-1)]$$
$$\frac{dy}{dx} = (3x+2)^2(2x-1)^3[24x+16+18x-9]$$
$$\frac{dy}{dx} = (3x+2)^2(2x-1)^3(42x+7)$$

jawab :

4. $y = (12-3x)^2(5+4x)^3$

Misal, $u = (12-3x)^2$ maka $du = 2.(12-3x)^1.(-3) = -6(12-3x)$

$v = (5+4x)^3$ maka $dv = 3.(5+4x)^{2.4} = 12(5+4x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = u.dv + v.du$$
$$\frac{dy}{dx} = (12-3x)^{2.12(5+4x)^2} + (5+4x)^3.\left(-6(12-3x)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(12 - 3x)(5 + 4x)^2[2(12 - 3x) - (5 + 4x)]$$
$$\frac{dy}{dx} = 6(12 - 3x)(5 + 4x)^2[24 - 6x - 5 - 4x]$$
$$\frac{dy}{dx} = 6(12 - 3x)(5 + 4x)^2(19 - 10x)$$

Rumus 5. $\boldsymbol{y = \frac{u}{v} \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v.du - u.dv}{v^2}}$

Keterangan : u , v adalah fungsi dari f(x)

du adalah turunan dari fungsi dari u

dv adalah derivative dari fungsi dari v

Contoh :

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

1. $y = \frac{5x+7}{2x-3}$
2. $y = \frac{12-3x}{5x+1}$

jawab :

1. $y = \frac{5x+7}{2x-3}$

$$misal\ , u = 5x + 7 \ \ maka \ \ du = 5$$
$$v \ = 2x - 3 \ \ maka \ \ dv = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v.du - u.dv}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - 3).5 - (5x + 7).2}{(2x - 3)^2} \leftrightarrow \frac{dy}{dx}$$
$$= \frac{10x - 15 - (10x + 14)}{4x^2 - 12x + 9}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x - 15 - 10x - 14}{4x^2 - 12x + 9} \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-29}{4x^2 - 12x + 9}$$

Jawab :

$$2.\ y = \frac{12 - 3x}{5x + 1}$$

$$misal\ , u = 12 - 3x \ \ maka \ \ du = -3$$

$$v \ = 5x + 1 \quad maka \ \ dv = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v.du - u.dv}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x + 1).(-3) - (12 - 3x).5}{(5x + 1)^2} \leftrightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{-15x - 3 - (60 - 15x)}{25x^2 - 10x + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-15x - 3 - 60 + 15x}{25x^2 - 10x + 1} \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-63}{25x^2 - 10x + 1}$$

Rumus 6. Rumus Berantai ,

$$\boldsymbol{y = f(t)\ maka\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}}$$

Contoh:

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

1. $y = \ t^2 + t + 3 \qquad dimana \ \ t = 2x + 1$
2. $y = \ 3t^2 - 5t - 12 \qquad dimana \ \ t = 6x + 3$
3. $y = \ 3 - 2t - 3t^2 \qquad dimana \ \ t = 2 - 3x$

jawab :

1. $y = \ t^2 + t + 3 \qquad dimana \ \ t = 2x + 1$

Cara I :

$y = \ t^2 + t + 3 \qquad\qquad t = \ 2x + 1$

$\frac{dy}{dt} = \ 2t + 1 \qquad\qquad \frac{dt}{dx} = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2t + 1).2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 4t + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x+1)+2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 8x+6$$

Cara II :

$y = t^2 + t + 3 \quad \leftrightarrow \quad y = (2x+1)^2 + (2x+1) + 3$

$y = 4x^2 + 4x + 1 + 2x + 1 + 3 \quad \leftrightarrow \quad y = 4x^2 + 6x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 8x+6$$

jawab

2. $y = 3t^2 - 5t - 12 \qquad dimana\ \ t = 6x + 3$

Cara I :

$y = 3t^2 - 5t - 12 \qquad\qquad t = 6x + 3$

$\frac{dy}{dt} = 6t - 5 \qquad\qquad \frac{dt}{dx} = 6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (6t-5).6 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 36t - 30$$

$$\frac{dy}{dx} = 36(6x+3) - 30 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 216x + 78$$

Cara II :

$y = 3t^2 - 5t - 12 \quad \leftrightarrow \quad y = 3(6x+3)^2 - 5(6x+3) - 12$

$y = 3(36x^2 + 36x + 9) - 30x - 15 - 12 = 108x^2 + 108x + 27 - 30x - 27$

$y = 108x^2 + 78x$

$$\frac{dy}{dx} = 216x + 78$$

jawab

3. $y = 3 - 2t - 3t^2 \qquad dimana\ \ t = 2 - 3x$

Cara I :

$y = 3 - 2t - 3t^2 \qquad\qquad t = 2 - 3x$

$$\frac{dy}{dt} = -2 - 6t \qquad\qquad \frac{dt}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-2 - 6t).(-3) \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6 + 18t$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 + 18(2 - 3x) - 30 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}$$

$$= 6 + 36 - 54x - 30$$

$$\frac{dy}{dx} = 12 - 54x$$

Cara II:

$y = 3 - 2t - 3t^2 \quad \leftrightarrow \quad y = 3 - 2(2 - 3x) - 3(2 - 3x)^2$

$y = 3 - 4 + 6x - 3(4 - 12x + 9x^2) = -1 + 6x - 12 + 36x - 27x^2$

$y = -27x^2 + 42x - 13$

$\frac{dy}{dx} = -54x + 42$

Rumus 7. Bilangan Natural,

$$\boldsymbol{y = e^{f(x)} \ maka \ \frac{dy}{dx} = df(x).e^{f(x)}}$$

Keterangan : e adalah bilangan natural

Contoh:

Tentukan turunan pertama $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

1. $y = e^{5x}$
2. $y = 6e^{x^2}$
3. $y = 3e^{(x^2+2x-7)}$

jawab

1. $y = e^{5x} \quad \leftrightarrow \quad f(x) = 5x$

$$df(x) = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = df(x).e^{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5e^{5x}$$

jawab

2. $y = 6e^{x^2} \quad \leftrightarrow \quad f(x) = x^2$

$$df(x) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = df(x).e^{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.2xe^{x^2} = 12e^{x^2}$$

jawab

3. $y = 3e^{(x^2+2x-7)} \quad \leftrightarrow \quad f(x) = x^2 + 2x - 7$

$$df(x) = 2x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = df(x).e^{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x+2)e^{x^2+2x-7} = (6x+6)e^{x^2+2x-7}$$

Turunan kedua

Turunan kedua diperoleh dengan cara menurunkan turunan pertama

Dengan symbol : y^{II}, $\frac{d^2y}{dx^2}$

Contoh :

Tentukan turunan kedua ((d^2 y)/ 〖dx〗 ^2) dari :

1. $y = 3x^2 - 4x + 10$
2. $y = 6x^3 - 4x^2 + 10x + 13$

jawab

1. $y = 3x^2 - 4x + 10$

   $\frac{dy}{dx} = 6x - 4$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6$$

jawab

2. $y = 6x^3 - 4x^2 + 10x + 13$

$$\frac{dy}{dx} = 18x^2 - 8x + 10$$

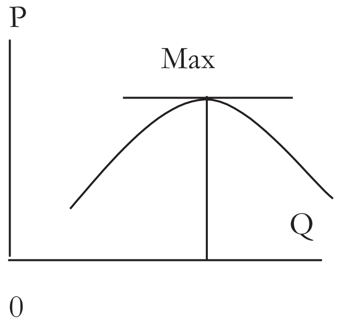
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x - 8$$

2. Optimasi Fungsi Satu Variable Bebas

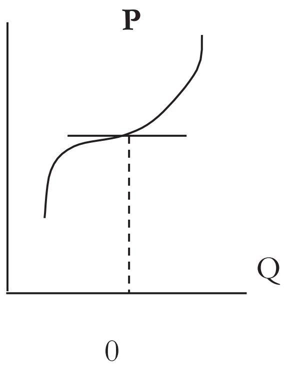
Optimasi (Optimization) adalah aktivitas untuk mendapatkan hasil terbaik di bawah keadaan yang diberikan.

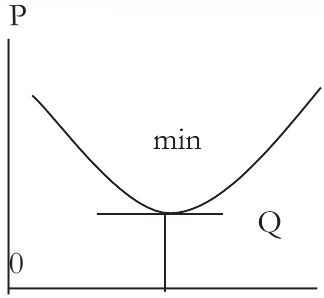
Tujuan akhir dari semua aktivitas tersebut adalah meminimumkan usaha (effort) atau memaksimumkan manfaat (benefit) yang diinginkan. Karena usaha yang diperlukan atau manfaat yang diinginkan dapat dinyatakan sebagai fungsi dari variabel keputusan, maka optimasi dapat didefinisikan sebagai proses untuk menemukan kondisi yang memberikan nilai minimum atau maksimum dari sebuah fungsi.

Optimasi dapat diartikan sebagai aktivitas untuk mendapatkan nilai minimum suatu fungsi karena untuk mendapatkan nilai maksimum suatu fungsi dapat dilakukan dengan mencari minimum dari negatif fungsi yang sama.



stasioner





Syarat suatu fungsi dikatakan optimum (maksimum/minimum),

Syarat I : Turunan Pertama = 0, pada syarat ini akan diperoleh nilai-nilai x.

Syarat II : Hasil dari turunan pertama pada syarat I , akan disubstitusikan kepada turunan kedua sebagai cara menentukan apakah nilai x tersebut pembuat nilai optimum.

Apabila disubstitusikan ke turunan kedua ((d^2 y)/ 〖dx〗^2) menghasilkan nilai negative atau lebih kecil dari 0 (nol) maka nilai x tersebut merupakan nilai pembuat Maksimum.

Secara matematika ditulis sebagai berikut.

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0\,, bernilai\ Maksimum$$

Apabila disubstitusikan ke turunan kedua ((d^2 y)/ 〖dx〗^2) menghasilkan nilai positif atau lebih besar dari 0 (nol) maka nilai x tersebut merupakan nilai pembuat Minimum.

Secara matematika ditulis sebagai berikut.

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0\,, bernilai\ Minimum$$

Apabila disubstitusikan ke turunan kedua ((d^2 y)/ 〖dx〗^2) menghasilkan nilai sama dengan 0 (nol) maka nilai x tersebut merupakan titik belok antara Maksimum dan Minimum.

Secara matematika ditulis sebagai berikut.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0\,, bernilai\ titik\ belok$$

Contoh :

Tentukan Nilai Optimum fungsi berikut :

1. $y = -x^2 + 2x + 3$
2. $y = x^2 – 6x + 8$
3. $y = 1/3\ x^3 – 3x^2 + 5x + 4$

jawab :

1. $y = - x^2 + 2x + 3$

syarat I : $\frac{dy}{dx} = -2x + 2 = 0$

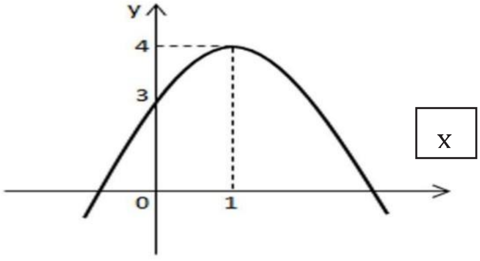
$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

Syarat II : $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0\ , fungsi\ Maksimum$

Pada turunan kedua diperoleh hasil lebih kecil dari nol (0) , nilai x = 1 tidak perlu disubstitusi ke turunan ke dua.

Selanjutnya akan dihitung nilai Maksimum fungsi tersebut, dengan cara mensubstitusikan nilai x = 1 ke persamaan , $y = - x^2 + 2x + 3$ akan diperoleh : $y_{max} = -(1)^2 + 2(1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$tik Maksimum fungsi adalah (1, 4).



jawab :

2. $y = x^2 - 6x + 8$

syarat I : $\frac{dy}{dx} = 2x - 6 = 0$

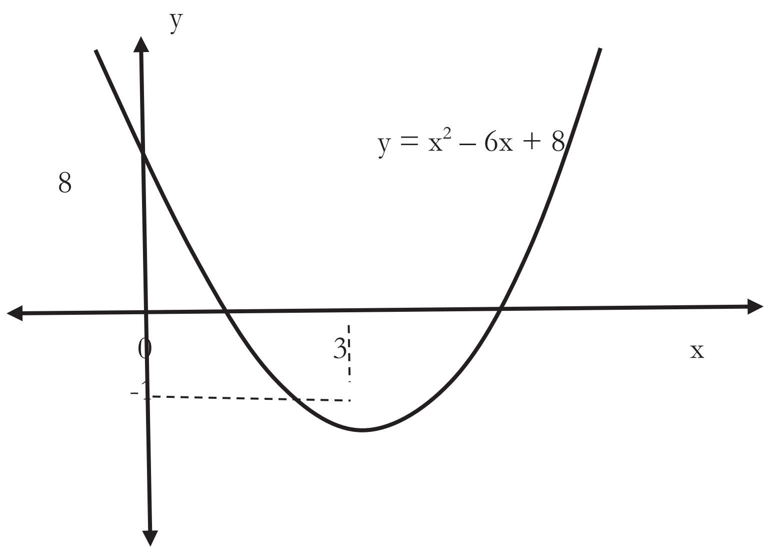
$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Syarat II : $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0\,, fungsi\ Minimum$

Pada turunan kedua diperoleh hasil lebih besar dari nol (0) , nilai x = 3 tidak perlu disubstitusi ke turunan ke dua.

Selanjutnya akan dihitung nilai Minimum fungsi tersebut, dengan cara mensubstitusikan nilai x = 3 ke persamaan , y = x^2 - 6x + 8 akan diperoleh : $y_{min} = (3)^2 - 6(3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$tik Maksimum fungsi adalah (3, -1).



jawab :

3. y = 1/3 x^3 – $3x^2$ + 5x + 4

syarat I : $\frac{dy}{dx} = x^2 - 6x + 5 = 0$

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 5$$

Syarat II : $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 6$

Pada turunan kedua belum diperoleh hasil yang pasti, maka nilai $x_1 = 1$ dan $x_2 = 5$ perlu disubstitusi pada turunan ke dua untuk mengetahui nilai x yang pembuat fungsi Maksimum atau Minimum.

$x_1 = 1$ substitusi ke turunan kedua : : $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 6 = 2(1) - 6$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6 = -4 < 0\ , x_1\ pembuat\ fungsi\ Maksimum$

Nilai Maksimum fungsi ,

$y_{Maks} = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 4$

$y_{Maks} = \frac{1}{3}(1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) + 4 = \frac{1}{3} - 3 + 5 + 4$

$y_{Maks} = 6\frac{1}{3}$

Titik Maksimum fungsi adalah ($1, 6\frac{1}{3}$).

$X_2 = 5$ substitusi ke turunan kedua : : $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 6 = 2(5) - 6$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 10 - 6 = 4 > 0\ , x_2\ pembuat\ fungsi\ Minimum$

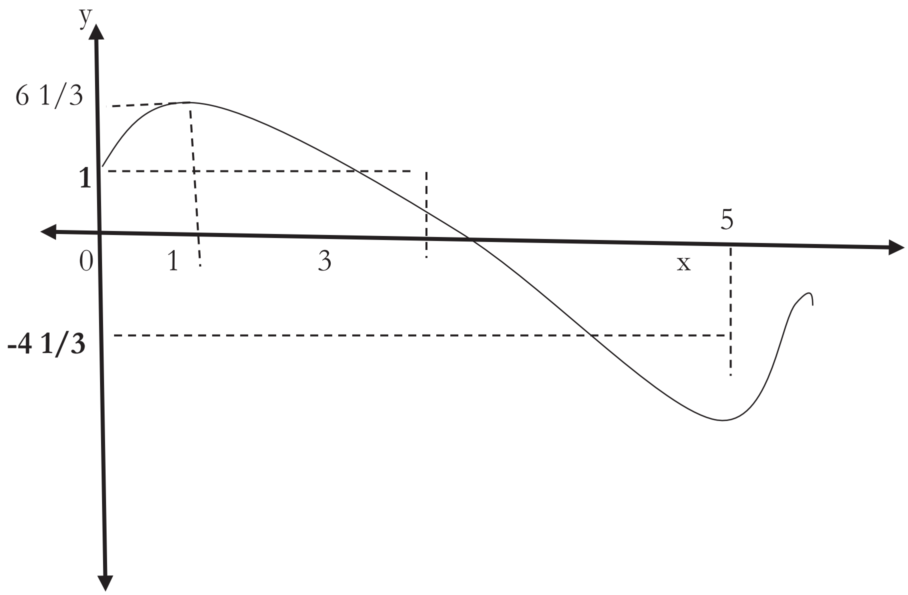
Nilai Minimum fungsi ,

$y_{Min} = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 4$

$y_{Min} = \frac{1}{3}(5)^3 - 3(5)^2 + 5(5) + 4 = \frac{125}{3} - 75 + 25 + 4$

$y_{Min} = -4\frac{1}{3}$

Titik Minimum fungsi adalah ($5, -4\frac{1}{3}$).



3. Differensial Dua Variabel Bebas Atau Lebih

Differensial dua variable bebas atau lebih disebut juga dengan istilah **Differensial Parsial** atau **turunan sebahagian**.

Jika dua variabel kita namakan variabel x dan y, jika kita turunkan variable x maka variable y kita anggap konstanta, atau sebaliknya jika kita turunkan variable y maka variable x kita anggap suatu konstanta.

Differensial Parsial bersesuaian dengan teori ilmu ekonomi yang disebut cateris paribus (1 variabel berubah namun variable lain dianggap tetap).

Rumus yang digunakan sama dengan menghitung differensial total (satu variable).

Dalam turunan parsial digunakan symbol :

$\frac{\partial y}{\partial x}$ dibaca dy dx   artinya turunan pertama y terhadap x

$\frac{\partial y}{\partial z}$ dibaca dy dz   artinya turunan pertama y terhadap z

$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ artinya turunan kedua dari y diturunkan terhadap z kemudian diturunkan terhadap x

Contoh : 1.

Tentukan turunan pertama ($\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$) dari fungsi berikut :

1. z = 2x + 3y
2. z = 2xy + 3y
3. z = $x^2 + y^2$ -3xy + $5x^2y$

jawab :

1. z = 2x + 3y $\leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2 + 0 = 2$

$$\leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3 = 3$$

2. z = 2xy + 3y $\leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2.1.y + 0 = 2y$

$$\leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2x.1 + 3 = 2x + 3$$

3. z = $x^2 + y^2$ -3xy + $5x^2y$ $\leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 - 3.1.y + 5.2x.y$

$$\leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y + 10xy$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y - 3x.1 + 5x^{2.1}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 3x + 5x^2$$

Contoh : 2.

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut :

1. z = $5x^4y^3$ + 2xy – x^2 + y^2

2. $u = x^2 - y^2 - z^2$

3. $L = x^2y + \lambda\,(3x + 6y - 18)$

4. $L = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda\,(8 - x - 2y)$

Jawab :

1. $Z = 5x^4y^3 + 2xy - x^2 + y^2$

$$\leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 5.4x^3.y^3 + 2.1.y - 2x + 0$$
$$= 20x^3y^3 + 2y - 2x$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^4.3y^2 + 2x.1 - 0 + 2y$$
$$= 15x^4y^2 + 2x + 2y$$

Jawab :

2. $u = x^2 - y^2 - z^2$

$$\leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$\leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 0 - 0 - 2z = -2z$$

Jawab :

3. $L = x^2y + \lambda\,(3x + 6y - 18)$

$$\leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 2x.y + \lambda\,(3 + 0 - 0)$$

$$\leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 2xy + 3\lambda$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial y} = x^{2.1} + \curlywedge (0 + 6 - 0)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial y} = x^2 + 6 \curlywedge$$

$$\leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \curlywedge} = 0 + 1.(3x + 6y - 18)$$

$$\leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \curlywedge} = 3x + 6y - 18$$

Jawab :

4. $L = x^2 + 2y^2 - xy + \curlywedge (8 - x - 2y)$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 0 - 1.y + \curlywedge (0 - 1 - 0)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - y - \curlywedge$$

$$\leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = 0 + 4y - x.1 + \curlywedge (0 - 0 - 2)$$

$$\leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - x - 2 \curlywedge$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \curlywedge} = 0 + 0 - 0 + 1.(8 - x - 2y)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \curlywedge} = 8 - x - 2y$$

4. Optimasi Fungsi Dua Variabel Bebas

Jika z = f (x,y) syarat mencari titik Optimum :

1. Turunan pertama (fx = fy = 0) atau ($\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$)
2. 1. D > 0 , (D = determinant) maka ada 2 kemungkinan :
   a. fxx dan fyy negative maka disebut titik Maksimum relative
   b. fxx dan fyy positif maka disebut titik Minimum relative
   2.D < 0 , maka titik kritis adalah titik pelana (saddle point)
   3.D = 0 , maka pengujian gagal sehingga perlu pengujian lebih
   lanjut.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = [fxx.fyy] - [fxy.fyx]$$

Contoh :

Jika diketahui fungsi : z = f(x,y) = 60x + 34y – 4xy – 6x^2 – 3y^2 + 5

Tentukan :

a. Nilai-nilai Optimumnya

b. Apakah berada di titik Maksimum relative atau Minimum relative

c. Nilai kritis fungsi

Jawab :

a. Nilai-nilai Optimumnya

z = f(x,y) = 60x + 34y – 4xy – 6x^2 – 3y^2 + 5

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 60 - 4y - 12x \ldots\ldots\ldots..persamaan\ (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 34 - 4x - 6y \ldots\ldots\ldots\ldots persamaan\ (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -12$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = -4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial yx} = -4$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat :

12x + 4y = 60 ….dikali 1 ….. 12x + 4y = 60

4x + 6y = 34 …..dikali 3 …. 12x +18y = 102

- 14y = - 42

y = 3

y = 3 substitusi ke persamaan 4x + 6y = 34

4x + 6(3) = 34

4x = 16

x = 4

Nilai Optimumnya adalah (4, 3)

b. Titik Maksimum relative atau Minimum relative

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = [fxx.fyy] - [fxy.fyx]$$

$$D = \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 72 - 16 = 56$$

D = 56 > 0 Berarti fungsi tersebut memiliki titik Maksimum relative

c. Nilai Kritis fungsi

$z = f(x,y) = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 5$

dengan mensubstitusi nilai $x = 4$ dan $y = 3$ akan diperoleh nilai kritis fungsi,

$$z = 60(4) + 34(3) - 4.4.3 - 6\,(4^2) - 3\,(3^2) + 5$$
$$z = 240 + 102 - 48 - 6.16 - 3.9 + 5$$
$$z = 294 - 96 - 27 + 5$$
$$z = 176$$

Tugas

1. Apa yang dimaksud dengan turunan atau diferensial dalam matematika?
2. Sebutkan dan jelaskan aturan-aturan dasar dalam diferensial (misalnya aturan jumlah, aturan hasil kali, aturan rantai, dll.)!
3. Bagaimana cara menurunkan fungsi polinomial, fungsi eksponensial, dan fungsi logaritma? Berikan contoh masing-masing!
4. Jelaskan perbedaan antara turunan pertama, turunan kedua, dan turunan tingkat lebih tinggi beserta kegunaannya!
5. Bagaimana penerapan diferensial dalam bidang ekonomi dan bisnis, misalnya untuk mencari fungsi biaya minimum atau keuntungan maksimum?

MATERI V

Aplikasi Differensial dalam Ilmu Ekonomi

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan aplikasi Differensial fungsi satu variabel bebas dalam Ilmu Ekonomi
2. Mahasiswa dapat menentukan nilai Elastisitas Fungsi
3. Mahasiswa dapat menentukan nilai Optimalisasi Biaya Total , Biaya Rata-rata dan Biaya Marginal
4. Mahasiswa dapat menentukan nilai Optimalisasi Pendapatan Total, Pendapatan Rata-rata dan Marginal Pendapatan
5. Mahasiswa dapat memahami hubungan antara Total Biaya, Total Pendapatan dan Total Laba, serta menentukan Optimalisasi nilai dari Laba Total, Laba Rata-rata dan Marginal Laba
6. Mahasiswa mampu menjelaskan aplikasi fungsi dua variabel bebas dalam Ilmu Ekonomi
7. Mahasiswa dapat menentukan nilai Optimalisasi Fungsi Terkendala,
8. Mahasiswa dapat menentukan Optimisasi Fungsi Produksi, dan Optimisasi Fungsi Utility
9. Mahasiswa dapat mendeskripsikan angka2 yang diperoleh

B. Materi Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda akan memahami :

1. Aplikasi Differensial fungsi satu variabel bebas dalam Ilmu Ekonomi
2. nilai Elastisitas Fungsi

3. nilai Optimalisasi Biaya Total , Biaya Rata-rata dan Biaya Marginal
4. nilai Optimalisasi Pendapatan Total, Pendapatan Rata-rata dan Marginal Pendapatan
5. hubungan antara Total Biaya, Total Pendapatan dan Total Laba, serta menentukan Optimalisasi nilai dari Laba Total, Laba Rata-rata dan Marginal Laba
6. aplikasi fungsi dua variabel bebas dalam Ilmu Ekonomi
7. nilai Optimalisasi Fungsi Terkendala
8. Optimisasi Fungsi Produksi, dan Optimisasi Fungsi Utility
9. Pendeskripsian angka-angka yang diperoleh

Bab ini akan membahas secara sistematis berbagai penerapan differensial dalam ilmu ekonomi, mulai dari fungsi satu variabel, elastisitas, optimisasi biaya dan pendapatan, hingga penggunaan fungsi multivariat dalam konteks produksi dan utilitas. Selain itu, akan dijelaskan pula bagaimana interpretasi angka-angka hasil perhitungan matematis tersebut agar bermakna dalam konteks ekonomi nyata.

1. Aplikasi Differensial Fungsi Satu Variabel dalam Ilmu Ekonomi

Fungsi satu variabel dalam ekonomi biasanya menggambarkan hubungan antara satu faktor input atau harga dengan output atau biaya. Contohnya, fungsi biaya total $C(x)$ yang hanya bergantung pada jumlah output x Dengan menggunakan turunan, kita dapat mengetahui laju perubahan fungsi tersebut, misalnya seberapa besar biaya bertambah jika produksi ditambah satu unit.

Sebagai contoh:

Sebagai contoh:

$$C(x) = 100 + 5x + 0,5x^2$$

Turunan pertama:

$$C'(x) = 5 + x$$

Artinya, biaya marginal dari memproduksi satu unit tambahan output adalah $5 + x$

Jika perusahaan memproduksi 10 unit, maka biaya marginalnya adalah 15.

Aplikasi sederhana seperti ini sangat penting karena dalam ekonomi banyak keputusan bergantung pada nilai marginal, bukan pada nilai total semata.

2. Nilai Elastisitas Fungsi

Elastisitas adalah ukuran seberapa responsif suatu variabel terhadap perubahan variabel lain. Dalam ekonomi, elastisitas sering digunakan untuk melihat hubungan antara permintaan dengan harga (price elasticity of demand), atau antara penawaran dengan harga.

Secara matematis, elastisitas fungsi permintaan Q(P) terhadap harga P didefinisikan:

$$E = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$$

Jika nilai $|E| > 1$ maka permintaan bersifat elastis (responsif terhadap perubahan harga). Jika $|E| < 1$rmintaan bersifat inelastis. Sedangkan $|E| = 1$ disebut elastisitas unitary.

Contoh:

$$Q(P) = 100 - 2P$$

Turunannya:

$$\frac{dQ}{dP} = -2$$

Jika harga $P = 20$, maka $Q = 60$.

$$E = -2 \times \frac{20}{60} = -0,67$$

Artinya, permintaan inelastis; kenaikan harga tidak terlalu memengaruhi jumlah barang yang diminta.

3. Optimalisasi Biaya Total, Biaya Rata-rata, dan Biaya Marginal

a. Biaya Total (Total Cost, TC)

Biaya total adalah jumlah seluruh pengeluaran perusahaan untuk memproduksi sejumlah output tertentu. Fungsi biaya total biasanya terdiri atas biaya tetap (fixed cost) dan biaya variabel (variable cost).

b. Biaya Rata-rata (Average Cost, AC)

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Biaya rata-rata menggambarkan biaya per unit output.

c. Biaya Marginal (Marginal Cost, MC)

$$MC(x) = \frac{dC}{dx}$$

Biaya marginal menunjukkan tambahan biaya jika output bertambah satu unit.

Optimalisasi terjadi ketika biaya rata-rata berada pada titik minimum. Kondisi ini diperoleh saat:

$$MC = AC$$

Contoh:

$$C(x) = 100 + 4x + x^2$$

$$AC = \frac{100}{x} + 4 + x$$

$$MC = 4 + 2x$$

Dengan menyamakan MC=AC,, kita bisa menentukan tingkat produksi optimal yang meminimalkan biaya rata-rata.

4. Optimalisasi Pendapatan Total, Pendapatan Rata-rata, dan Pendapatan Marginal

a. **Pendapatan Total (Total Revenue, TR)**

$$TR = P(x) \cdot x$$

di mana $P(x)$ adalah fungsi harga.

b. **Pendapatan Rata-rata (Average Revenue, AR)**

$$AR = \frac{TR}{x} = P(x)$$

c. **Pendapatan Marginal (Marginal Revenue, MR)**

$$MR = \frac{dTR}{dx}$$

Optimalisasi pendapatan terjadi ketika marginal revenue (MR) = 0, artinya pendapatan sudah mencapai titik maksimum.
Contoh:

$$P(x) = 50 - x$$

$$TR = x(50 - x) = 50x - x^2$$

$$MR = 50 - 2x$$

Pendapatan maksimum dicapai saat $MR = 0MR = 0MR = 0 \rightarrow x = 25x = 25x = 25$.

5. Hubungan antara Total Biaya, Total Pendapatan, dan Total Laba

Laba total (π\piπ) diperoleh dari selisih antara pendapatan total dengan biaya total:

Laba total (π\piπ) diperoleh dari selisih antara pendapatan total dengan biaya total:

$$\pi(x) = TR(x) - C(x)$$

Turunan dari fungsi laba akan memberikan **laba marginal (Marginal Profit, MP)**:

$$MP = \frac{d\pi}{dx} = MR - MC$$

Kondisi optimalisasi laba tercapai saat:

$$MR = MC$$

dan diperkuat dengan syarat turunan kedua yang negatif.

Contoh:

$$TR = 50x - x^2, \quad C(x) = 10x + 100$$

$$\pi(x) = 50x - x^2 - (10x + 100) = 40x - x^2 - 100$$

$$\pi'(x) = 40 - 2x$$

Optimal laba ketika $x = 20$

6. Aplikasi Fungsi Dua Variabel Bebas dalam Ilmu Ekonomi

Dalam kenyataannya, banyak fungsi ekonomi melibatkan lebih dari satu variabel. Misalnya, fungsi produksi tergantung pada tenaga kerja (L) dan modal (K):

$$Q = f(L, K)$$

Dengan turunan parsial, kita dapat mengetahui seberapa besar perubahan output jika salah satu input berubah, sementara input lainnya tetap.

$$\frac{\partial Q}{\partial L}, \quad \frac{\partial Q}{\partial K}$$

Ini dikenal sebagai **produk marginal tenaga kerja (MPL)** dan **produk marginal modal (MPK)**.

7. Nilai Optimalisasi Fungsi Terkendala

Banyak persoalan ekonomi yang melibatkan pembatasan (constraint). Misalnya, konsumen ingin memaksimalkan utilitas dengan batasan anggaran. Teknik yang digunakan adalah **Lagrange Multiplier**.

Jika fungsi utilitas:

$$U = f(x, y)$$

dengan kendala anggaran:

$$m = p_x x + p_y y$$

maka fungsi Lagrange:

$$L = f(x, y) + \lambda(m - p_x x - p_y y)$$

Dengan mengambil turunan parsial terhadap x, y, λ kita bisa menemukan titik optimum.

8. Optimisasi Fungsi Produksi dan Fungsi Utility

a. Fungsi Produksi

Fungsi produksi umum:

$$Q = L^{\alpha} K^{\beta}$$

Optimalisasi dicapai saat rasio marginal produk sama dengan rasio harga input:

$$\frac{MPL}{w} = \frac{MPK}{r}$$

dengan www upah tenaga kerja, r biaya modal.

b. Fungsi Utility

Fungsi utilitas misalnya:

$$U(x, y) = x^{0,5} y^{0,5}$$

Optimalisasi konsumsi dicapai saat:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

9. Pendeskripsian Angka-angka yang Diperoleh

Hasil perhitungan diferensial harus selalu diinterpretasikan dalam konteks ekonomi. Angka bukan hanya hasil matematis, tetapi juga informasi untuk pengambilan keputusan.

Misalnya:

- Jika biaya marginal lebih kecil dari pendapatan marginal, maka perusahaan sebaiknya menambah produksi.
- Jika elastisitas permintaan menunjukkan nilai lebih besar dari 1, maka kebijakan harga akan sangat berpengaruh pada penjualan.
- Jika turunan kedua negatif, maka titik tersebut adalah maksimum (misalnya laba maksimum atau pendapatan maksimum).

Dengan demikian, setiap hasil analisis harus dikaitkan kembali dengan realitas ekonomi agar bermanfaat.

Differensial adalah alat analisis yang sangat kuat dalam ilmu ekonomi. Dengan konsep turunan, kita dapat memahami berbagai aspek penting seperti elastisitas, biaya, pendapatan, laba, serta masalah optimisasi. Lebih lanjut, dengan menggunakan fungsi multivariat dan metode Lagrange, kita dapat menyelesaikan persoalan yang lebih kompleks seperti optimisasi produksi dan utilitas dengan kendala tertentu.

Oleh karena itu, penguasaan aplikasi diferensial tidak hanya memperkaya pemahaman teoritis mahasiswa ekonomi, tetapi juga memberikan bekal praktis untuk menghadapi persoalan nyata dalam dunia bisnis dan kebijakan ekonomi.

Pertanyaan

1. Jelaskan bagaimana penerapan konsep turunan (differensial) dalam fungsi biaya total untuk menentukan biaya marginal, dan berikan contoh perhitungannya!
2. Bagaimana cara menentukan nilai elastisitas fungsi permintaan menggunakan turunan? Jelaskan langkah-langkahnya dengan contoh fungsi permintaan sederhana!
3. Mengapa kondisi $MR = MC$ (Marginal Revenue = Marginal Cost) dianggap sebagai syarat optimalisasi laba dalam ilmu ekonomi?
4. Berikan contoh fungsi produksi dua variabel, kemudian tunjukkan bagaimana menghitung produk marginal tenaga kerja (MPL) dan produk marginal modal (MPK) dengan turunan parsial!
5. Apa yang dimaksud dengan metode Lagrange Multiplier dalam optimisasi fungsi terkendala, dan bagaimana penerapannya dalam masalah konsumsi dengan batasan anggaran?

MATERI VI

Matriks

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut :

1. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep Matriks dan menentukan determinan Matriks, Adjoint matriks, Transpose dan invers matriks, serta penggunaan metode aturan Crammer

B. Materi Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda akan memahami :

1. konsep Matriks dan menentukan determinan Matriks, Adjoint matriks, Transpose dan invers matriks, serta penggunaan metode aturan Crammer

6.1. Defenisi Dan Jenis Matriks

6.1.1. Defenisi Matriks

Matriks adalah kumpulan unsur yang disusun dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang.

Matriks biasanya dinotasikan dengan huruf besar tebal, misalnya **A,B** sedangkan unsur- unsurnya bisa berupa bilangan atau huruf kecil. Banyaknya baris dan kolom matrks disebut ordo matriks. Matriks berordo $m \times n$ dinotasikan dengan $\mathbf{A}_{m\times n}=[a_{ij}]$, dalam hal ini a_{ij} adalah unsur yang berada pada baris ke i dan kolom ke j.

$$A_{mxn} = \lfloor aij \rfloor = (aij) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh: 1.

Matriks **A** berikut adalah matriks yang berordo 3 ×1.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Contoh : 2.

Matriks **B** berikut adalah matriks yang berordo 1×3

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

Contoh: 3.

Matriks **C** berikut adalah matriks yang berordo 3×3 atau Matriks persegi.

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Contoh: 4.

Matriks **D** berikut adalah matriks yang berordo 3×4 atau Matriks persegi Panjang.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

Contoh: 5.

Matriks **E** berikut adalah **matriks Identitas** (I) yang berordo 2×2. Matriks Identitas adalah Matriks skalar yang semua unsurnya 1.

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh: 6.

Matriks **F** berikut adalah matriks Identitas (I) yang berordo 3×3. Matriks Identitas adalah Matriks skalar yang semua unsurnya 1.

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh: 7.

Matriks **G** berikut adalah **matriks NOL** yang berordo 3×3. Matriks Nol adalah Matriks yang semua unsurnya 0.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh: 8.

Matriks **H** berikut adalah **matriks SIMETRIS** .

Matriks Simetris adalah Matriks yang unsur-unsurnya simetris terhadap diagonal utama, yaitu : aij = aji untuk setiap I dan j.

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

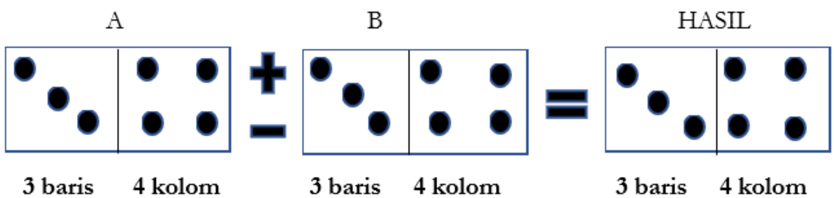
6.1.2. Operasi Pada Matriks

Matriks memiliki operasi aritmatika untuk menyelesaikan persoalan pada matriks tersebut. Operasi aritmatika pada matriks dapat berupa penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian/invers. Pada bagian ini akan dijelaskan tentang operasi aritmatika tersebut.

6.1.2.1.Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Definisi . (Anton. H, 1998): Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Dua buah matriks atau lebih dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika matriks tersebut memiliki ordo yang sama (Banyak baris dan Kolomnya sama).



Contoh : 1.

Ditentukan Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

Tentukan : a. A + B

b. A – B

Jawab :

a. $A + B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 2+7 \\ 7+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$

b. $A - B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5 \\ 2-7 \\ 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

Contoh : 2.

Ditentukan Matriks $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan : a. P + Q

b. P – Q

Jawab :

a. P + Q = $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3 & 1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 4 & 7\end{bmatrix}$

b. P - Q = $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 9\end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix}-3 & 1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 11\end{bmatrix}$

Contoh : 3.

Ditentukan Matriks $K = \begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 5 & -1 & 10\\ -4 & 6 & -5\end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix}-7 & -3 & 3\\ -1 & 6 & 1\\ 9 & -4 & -2\end{bmatrix}$

Tentukan : a. K + L

b. K – L

Jawab :

a.K + L = $\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 5 & -1 & 10\\ -4 & 6 & -5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-7 & -3 & 3\\ -1 & 6 & 1\\ 9 & -4 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9 & -2 & 0\\ 4 & 5 & 11\\ 5 & 2 & -7\end{bmatrix}$

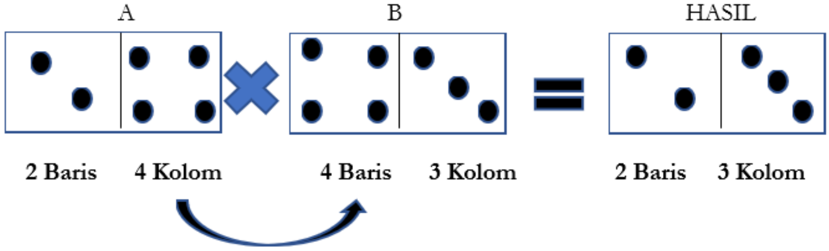
b. K – L = = $\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 5 & -1 & 10\\ -4 & 6 & -5\end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix}-7 & -3 & 3\\ -1 & 6 & 1\\ 9 & -4 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 4 & -6\\ 6 & -7 & 9\\ -13 & 10 & -3\end{bmatrix}$

- SIFAT PENJUMLAHAN MATRIKS

1. Komutatif : A + B = B + A
2. Assosiatif: (A + B) + C = A + (B+C)
3. A + O = O + A = A, O adalah matriks nol.
4. A + B = O, B disebut lawan atau negatif A, ditulis B = -A

6.1.2.2.Perkalian Matriks

Konsep dari operasi hitung untuk perkalian matriks adalah mengalikan elemen-elemen baris pada matriks pertama dengan elemen-elemen kolom pada matriks ke dua. Setiap anggota elemen matriks dikalikan dengan anggota elemen matriks lainnya sesuai urutan dan aturan yang berlaku pada perkalian matriks. Sehingga, perkalian matriks hanya bisa dilakukan untuk ***banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua***.



Prinsip Perkalian adalah BARIS dikali KOLOM

Contoh : 1.

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Tentukan hasil dari : a. A x B

b. B x A

Jawab :

b. $A \times B = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1x3+2x4\end{bmatrix} = [3+8] = [11]$

1 x 2 **2 x 1** **1 x 1**

b. $B \times A = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x1 & 3x2\\4x1 & 4x2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\4 & 8\end{bmatrix}$

2 x 1 **1 x 2** **2 x 2**

Contoh : 2.

Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -3\end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$

Tentukan hasil dari : a. P x Q

b. Q x P

Jawab :

a. $P \times Q = \begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1x4 + 2x5\\-1x4 + (-3)x5\end{bmatrix}$

2 x 2 **2 x 1**

$= \begin{bmatrix}4+10\\-4-15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\-19\end{bmatrix}$

2 x 1

b. $Q \times P = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -3\end{bmatrix}$ = Tidak dapat dikalikan

2 x 1 **2 x 2**

Contoh : 3.

Diketahui matriks $K = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 5 & 4\\2 & 6 & 1\end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\3 & 7 & 2\\1 & 2 & 5\end{bmatrix}$

Tentukan hasil dari : K x L

Jawab :

$$K \text{ x } L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

3 x 3 **3 x 3**

$$\boldsymbol{KxL} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{3+6+3} & \mathbf{4+14+6} & \mathbf{1+4+15} \\ \mathbf{6+15+4} & \mathbf{8+35+8} & \mathbf{2+10+20} \\ \mathbf{6+18+1} & \mathbf{8+42+2} & \mathbf{2+12+5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{24} & \mathbf{20} \\ \mathbf{25} & \mathbf{51} & \mathbf{32} \\ \mathbf{25} & \mathbf{52} & \mathbf{19} \end{bmatrix}$$

Sifat – Sifat Perkalian Matriks

Perkalian Matriks juga mempunyai beberapa sifat tertentu yaitu sebagai berikut :

- Sifat komutatif , A x B ≠ B x A
- Sifat Distributif terhadap penjumlahan : A(B + C) = AxB + AxC
- Sifat asosiatif , (AxB)C = A(BxC)

6.1.2.3.Pembagian Matriks/ Invers Matriks.

Invers matriks adalah kebalikan (invers) dari sebuah matriks yang apabila matriks tersebut dikalikan dengan inversnya, akan menjadi matriks identitas. Invers matriks dilambangkan dengan A^{-1}.

Rumus : $A^{-1} = \frac{1}{\det A.} \, x \; adj \; A$

Keterangan : A^{-1} = Invers Matriks A

det A = $|A|$ = determinant Matriks A

adj A = adjoint Matriks A

Khusus Matriks Berordo 2x2

Ada beberapa cara untuk mencari solusi atau penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear, salah satunya yaitu menggunakan **Aturan Cramer**.

Aturan Cramer digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan n persamaan dalam n variabel. Dasar metode ini adalah matriks dan determinan, sehingga kita perlu memahami kedua konsep tersebut terlebih dahulu untuk dapat menerapakan Aturan Cramer dalam mencari solusi suatu sistem persamaan linear.

Misalkan Matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ berordo 2x2 ,

$$A^{-1} = \frac{1}{axd - bxc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh : 1.

Ditentukan Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

Tentukan Invers Matriks A (A^{-1}) .

Jawab :

det A = 1x7 - 3x2 = 7 – 6 = 1.

adj A = $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

A^{-1} = 1/1. $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh : 2.

Ditentukan Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan Invers Matriks A (A^{-1}) .

Jawab :

det A = 1x(-2) - (-1)x(-3) = -2 – 3 = - 5 .

adj A = $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = 1/\text{-}\,5 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{-5} & \frac{1}{-5} \\ \frac{3}{-5} & \frac{1}{-5} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}40 & -0{,}20 \\ -0{,}60 & -0{,}20 \end{bmatrix}$$

Khusus Matriks Berordo 3x3

Misalkan Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ berordo 3x3 ,

DETERMINANT (det).

Teorema: *Determinan matriks A yang berukuran n × n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan yakni untuk setiap 1 ≤ i ≤ n dan 1 ≤ j ≤ n, maka*

- $det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$ *(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)*

Atau

- $det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$ *(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)*

$$\det A = |A| = \left| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = [(axexi + bxfxg + cxdxh) - (cxexg + axfxh + bxdxi)]$$

Contoh : 1.

Ditentukan Matriks A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Tentukan determinant Matriks A !

Jawab :

det A = $|A|$ = = $\left|\begin{matrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix}$

$|A| = \big(0 + 0 + (-4)\big) - \big(8 + 0 + (-3)\big)$

= - 4 – 5 = - 9

Det A = - 9

Contoh : 2.

Ditentukan Matriks P = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Tentukan determinant Matriks A !

Jawab :

det P = $|P|$ = = $\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix}$

$|A| = (-1 + (-6) + 4) - \big(4 + (-6) + (-1)\big)$

= - 3 – (-3) = - 3 + 3 = 0

det A = 0

Adjoint (Adj).

Sebelum kita melanjutkan ke adjoint matriks , kita membahas tentang **Matriks Transpose dan Matriks Tanda.**

Matriks transpose adalah matriks yang mempertukarkan baris menjadi kolom atau sebaliknya, mempertukarkan kolom menjadi baris. Matriks transpose diberi simbol A^T .

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriks Tanda adalah suatu matriks yang telah ditentukan dengan pola sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Misalkan Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

adjoint matriks A adalah …..

Ada 2 cara untuk menghitung adjoint Matriks A ,

Cara I . Transfose kan terlebih dahulu Matriks asal kemudian dihitung adjoint Matriksnya.

Cara II . Dihitung terlebih dahulu adjointnya baru hasil akhir ditransposekan.

Cara I . Transfose terlebih dahulu

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \text{maka } A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(e.i - h.f) & -(b.i - h.c) & +(b.f - e.c) \\ -(d.i - g.f) & +(a.i - g.c) & -(a.f - d.c) \\ +(d.h - g.e) & -(a.h - g.b) & +(a.e - d.b) \end{bmatrix}$$

Contoh : 1.

Ditentukan Matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Tentukan adjoint Matriks A !

Jawab :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Maka $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(-1-0) & -\left(-3-(-4)\right) & +(0-2) \\ -(-1-0) & +(0-8) & -(0-2) \\ +(-2-4) & -(0-12) & +(0-3) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(-1) & -(-3+4) & +(-2) \\ -(-1) & +(-8) & -(-2) \\ +(-6) & -(-12) & +(-3) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -8 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

Contoh: 2.

Ditentukan Matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Tentukan adjoint Matriks P !

Jawab:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Maka } P^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } P = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(-1-(-6)) & -(1-(-4)) & +(-3-2) \\ -(1-6) & +(-1-4) & -(3-(-2)) \\ +(2-2) & -(-2-(-2)) & +(1-1) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(-1+6) & -(1+4) & +(-5) \\ -(-5) & +(-5) & -(3+2) \\ +(0) & -(-2+2) & +(0) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cara II. Dihitung terlebih dahulu adjointnya baru hasil akhir ditransposekan.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & c \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(e.i-f.h) & -(d.i-f.g) & +(d.h-e.g) \\ -(b.i-c.h) & +(a.i-c.g) & -(a.c-b.g) \\ +(b.f-c.e) & -(a.f-c.d) & +(a.e-b.d) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A^T = = \begin{bmatrix} +(e.i-f.h) & -(b.i-c.h) & +(b.f-c.e) \\ -(d.i-f.g) & +(a.i-c.g) & -(a.f-c.d) \\ +(d.h-e.g) & -(a.c-b.g) & +(a.e-b.d) \end{bmatrix}$$

Contoh : 1.

Ditentukan Matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Tentukan adjoint Matriks A !

Jawab :

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(-1-0) & -(-1-0) & +(-2-4) \\ -\left(-3-(-4)\right) & +(0-8) & -(0-12) \\ +(0-2) & -(0-2) & +(0-3) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +(-1) & -(-1) & +(-6) \\ -(-3+4) & +(-8) & -(-12) \\ +(-2) & -(-2) & +(-3) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -1 & -8 & 12 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -8 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} = \text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -8 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIKS ORDO 3x3

Contoh : 1.

Ditentukan Matriks : A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukan Invers Matriks A !

Jawab :

det A = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$ = 1- 6 + 0 – (4 + 0 – 2) = -5 -2 = -7 .

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

adj A = $\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

adj A = $\begin{pmatrix} +(1-0) & -(-1-0) & +(-3-2) \\ -(-2-6) & +(1-4) & -(3+4) \\ +(0-2) & -(0-2) & +(-2+2) \end{pmatrix}$

adj A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 8 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.adj\ A$

$A^{-1} = \frac{1}{-7}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 8 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{-7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{3}{-7} & -\frac{7}{-7} \\ -\frac{2}{-7} & \frac{2}{-7} & \frac{0}{-7} \end{pmatrix}$

Maka : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ -1\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$

Atau,

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}143 & -0{,}143 & 0{,}714 \\ -1{,}143 & 0{,}429 & 1 \\ 0{,}286 & -0{,}286 & 0 \end{pmatrix}$

CATATAN :

Jika ditemukan determinant bernilai 0 (nol) berarti matriks tersebut tidak memiliki invers matriks , lebih lanjutnya permasalahan tersebut tidak memiliki solusi.

MATERI VII

Aplikasi Matriks dalam Ilmu Ekonomi

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut :

1. Mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan Aplikasi Matriks Dalam Ilmu Ekonomi, seperti Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
2. Mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan, serta menyelesaikan permasalahan-permasalahan Ekonomi dan bisnis dengan model Analisis Input – Output

B. Materi Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda akan memahami :

1. Aplikasi Matriks Dalam Ilmu Ekonomi, seperti Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
2. Penyelesaian permasalahan-permasalahan Ekonomi dan bisnis dengan model Analisis Input – Output

1.1. Aplikasi Matriks Dalam Persamaan Linier.

Misalkan persamaan linier yang diperoleh adalah :

$$ax_1 + bx_2 = c_1$$
$$px_2 + qx_2 = c_2$$

Persamaan linier di atas dapat diubah ke dalam Matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung nilai x1 dan x2 dapat dilakukan dengan cara determinant Matriks atau invers Matriks.

Cara I: Determinant Matriks

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c1 & b \\ c2 & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} \text{ dan } x2 = \frac{\begin{vmatrix} a & c1 \\ p & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}$$

Cara II: Invers Matriks

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ p & q \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \end{bmatrix}$$

Contoh: 1.

Seorang Anak Memiliki Sejumlah Uang .Dia Ingin Membeli Baju Dan Celana. Harga Sebuah Celana Dan Sebuah Baju Sebesar Rp 200.000.

Harga 3 Celana Dan 2 Baju Sebesar Rp 550.000.

Tentukan Berapa Harga Baju Dan Celana dengan menggunakan Matriks !

Jawab:

Langkah awal, kita ubah permasalahan di atas dalam bentuk persamaan linier dengan memisalkan , Harga celana = x_1 dan harga baju = x_2 maka didapat persamaan sebagai berikut,

$$x_1 + x_2 = 200.000$$
$$3x_1 + 2x_2 = 550.000$$

Selanjutnya persamaan linier di atas di ubah dalam bentuk Matriks, sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 \\ 550.000 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita akan menghitung nilai x_1 dan x_2.

Cara determinant Matriks .

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 200.000 & 1 \\ 550.000 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{400.000 - 550.000}{2-3} = \frac{-150.000}{-1} = 150.000$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200.000 \\ 3 & 550.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{550.000 - 600.000}{2-3} = \frac{-50.000}{-1} = 50.000$$

Maka diperoleh bahwa harga celana (x_1) Rp 150.000 dan harga baju (x_2) Rp 50.000.

Cara invers Matriks.

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 200.000 \\ 550.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2-3} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200.000 \\ 550.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200.000 \\ 550.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400.00 + 550.00 \\ 600.000 - 550.00 \end{bmatrix}$$

[■(𝑥_1@𝑥_2)] = [■(150.00@50.00)]

Maka diperoleh bahwa harga celana (x_1) Rp 150.000 dan harga baju (x_2) Rp 50.000.

1.2. Aplikasi Matriks Dalam Matriks Transaksi Dan Matriks Teknologi.

Matriks Transaksi

Sebuah kegiatan ekonomi termasuk bisnis pastinya memiliki beberapa sektor kegiatan. Masing-masing sektor kegiatan ini membentuk sistem ekonomi yang tidak lepas dari masukan dan keluaran baik secara fisik maupun nilai uang. Setiap sektor membutuhkan masukan untuk menjalankan kerjanya, selain itu sector tersebut memberi keluaran pada sistem atas kinerjanya. Secara tidak langsung sektor tersebut menggunakan keluaran yang berasal dari sektor lain. Keluaran dari sektor ini juga dapat digunakan oleh sektor lain. Sektor tersebut pula memberi keluaran yang digunakan sebagai masukan sektor itu sendiri ataupun dikonsumsi sebagai permintaan akhir yang didistribusikan ke konsumen. Masukan dan keluaran yang dimaksud ialah pemasukan dan pengeluaran nilaidari/ke masing-masing sektor ekonomi. Pada akhirnya relasi masukan-keluaran tersebut disajikan dalam bentuk tabel yang disebut matriks transaksi.

	Distribusi Konsumsi	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Distribusi	X11 X12 … X1m	U1	X1
Produksi	X21 X 22 .. X2m	U2	X2
	Xm1 Xm2 .. Xmm	Um	Xm
Nilai Tambah	Y1 Y2 ……… Ym	Um+1	Xm+1
Keluaran Total	X1 X2 ……… Xm	Xm+1	X

Pemakaian total oleh sektor i :

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} (X_{ij} + U_i)$$

Keluaran total dari sector j :

$$X_j = \sum_{j=1}^{m} (X_{ij} + Y_i)$$

Matriks Teknologi

Matriks Teknologi terbentuk dari sejumlah koefisien teknologi (aij) yang terbentuk dari elemen matriks transaksi

Koefisien teknologi

Koefisien teknologi adalah aij adalah suatu rasio yang menjelaskan jumlah atau nilai keluaran sektor i yang diperlukan sebagai masukan untuk menghasilkan satu unit keluaran di sektor j.

$$a\_ij = X\_ij/X\_j$$

Rumus menghitung output :

$$X = [I - A]^\wedge(-1).C$$

Keterangan :

X = Output yang akan diketahui

I = Matriks Identitas

A = Matriks Teknologi/ Matriks Koefisien

C = Permintaan Akhir yang diprediksi

Contoh : 1.

Jika suatu hubungan input-output antar sektor dalam suatu perekonomian ditunjukkan pada tabel berikut (Dalam Ton):

Sektor	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir
Pertanian	80	100	100	40
Industri	80	200	60	60
Jasa	80	100	100	20

b. Tentukan masing-masing koefisien masukannya

c. Berapa keluaran total persektor bila permintaan akhir terhadap setiap sektor diharapkan merata 60.

Jawab :

Table di atas adalah table suntingan dari table berikut,

Sektor	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir	Output total
Pertanian	80	100	100	40	320
Industri	80	200	60	60	400
Jasa	80	100	100	20	300
Nilai Tambah	80	50	20	-	-
Input Total	320	400	300	-	-

Selanjutnya kita akan menghitung Matriks Teknologi,

$$a\_ij = X\_ij/X\_j$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{80}{320} & \frac{100}{400} & \frac{100}{300} \\ \frac{80}{320} & \frac{150}{400} & \frac{80}{300} \\ \frac{80}{320} & \frac{100}{400} & \frac{100}{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}250 & 0{,}250 & 0{,}333 \\ 0{,}250 & 0{,}375 & 0{,}267 \\ 0{,}250 & 0{,}250 & 0{,}333 \end{bmatrix}$$

Setelah Matriks teknologi kita dapat, selanjutnya kita gunakan Rumus
:

$$X = 〖[I-A]〗^(-1).C$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,250 & 0,250 & 0,333 \\ 0,250 & 0,375 & 0,267 \\ 0,250 & 0,250 & 0,333 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0,750 & -0,250 & -0,333 \\ -0,250 & 0,625 & -0,267 \\ -0,250 & -0,250 & 0,667 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Misalkan Matriks B

$$B = \begin{pmatrix} 0,750 & -0,250 & -0,333 \\ -0,250 & 0,625 & -0,267 \\ -0,250 & -0,250 & 0,667 \end{pmatrix}$$

$$B^(-1) = 1/det\ B\ .adjB$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 0,750 & -0,250 & -0,250 \\ -0,250 & 0,625 & -0,250 \\ -0,333 & -0,267 & 0,667 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0,750 & -0,250 & -0,250 \\ -0,250 & 0,625 & -0,250 \\ -0,333 & -0,267 & 0,667 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0,750 & -0,250 \\ -0,250 & 0,625 \\ -0,333 & -0,267 \end{matrix}$$

$$\det 〖B = 〗 0,2752 - 0,1438 = 0,1314$$

adj B =

$$= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0,625 & -0,250 \\ -0,267 & 0,667 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0,250 & -0,250 \\ -0,333 & 0,667 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -0,250 & 0,625 \\ -0,333 & -0,267 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0,250 & -0,250 \\ -0,267 & 0,667 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0,750 & -0,250 \\ -0,333 & 0,667 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,750 & -0,250 \\ -0,333 & -0,267 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -0,250 & -0,250 \\ 0,625 & -0,250 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,750 & -0,250 \\ -0,250 & -0,250 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0,750 & -0,250 \\ -0,250 & 0,625 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +(0,4169 - 0,0668) & -(-0,1668 - 0,0833) & +(0,0668 + 0,2081) \\ -(0,1668 - 0,0668) & +(0,5002 - 0,0833) & -(-0,2003 - 0,0833) \\ +(0,0625 + 0,1563) & -(-0,1875 - 0,0625) & +(0,4688 - 0,0625) \end{pmatrix}$$

$$adjB = \begin{pmatrix} 0,3501 & 0,2501 & 0,2749 \\ -0,1000 & 0,4169 & 0,2836 \\ 0,2188 & 0,2500 & 0,4063 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{0,1314} \begin{pmatrix} 0,3501 & 0,2501 & 0,2749 \\ -0,1000 & 0,4169 & 0,2836 \\ 0,2188 & 0,2500 & 0,4063 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2,6644 & 1,9033 & 2,0921 \\ -0,7610 & 3,1728 & 2,1583 \\ 1,6651 & 1,9026 & 3,0921 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0,750 & -0,250 & -0,333 \\ -0,250 & 0,625 & -0,267 \\ -0,250 & -0,250 & 0,667 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6644 & 1,9033 & 2,0921 \\ -0,7610 & 3,1728 & 2,1583 \\ 1,6651 & 1,9026 & 3,0921 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 159,864 + 114,198 + 125,525 \\ -45,660 + 190,368 + 129,498 \\ 99,906 + 114,156 + 185,526 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 399{,}587 \\ 274{,}206 \\ 399{,}588 \end{bmatrix}$$

Kesimpulan dari perhitungan di atas didapat,

- Keluaran total sektor pertanian = 399, 587 ton
- Keluaran total sektor industri = 274, 206 ton
- Keluaran total sektor jasa = 399, 588 ton

Soal :

Jika suatu hubungan input-output antar sektor dalam suatu perekonomian ditunjukkan pada tabel berikut (Dalam Ton):

Sektor	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir
Pertanian	90	150	225	75
Industri	135	150	300	15
Jasa	270	200	300	130

a. Tentukan masing-masing koefisien masukannya

b. Berapa keluaran total persektor bila permintaan akhir terhadap sektor pertanian 50 ton, sektor industri 10 ton dan sektor jasa100 ton.

MATERI VIII

Integral

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut :

1. Mahasiswa mampu menjelaskan Pengertian Integral
2. Mahasiswa mampu menyelesaikan integral tak tentu
3. Mahasiswa mampu menyelesaikan integral tertentu

B. Materi Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda akan memahami :

1. Integral
2. Integral tak tentu
3. Integral tertentu

Penjelasan Materi

1. Integral

Integral adalah salah satu konsep utama dalam kalkulus yang erat kaitannya dengan turunan. Jika turunan digunakan untuk menghitung laju perubahan suatu fungsi, maka integral digunakan untuk menghitung akumulasi atau penjumlahan yang berkesinambungan. Dengan kata lain, turunan melihat perubahan kecil dari suatu besaran, sedangkan integral melihat penjumlahan dari perubahan kecil tersebut untuk mendapatkan suatu total.

Secara intuitif, integral dapat dipahami sebagai cara menghitung luas di bawah kurva atau grafik suatu fungsi. Misalnya, jika kita memiliki grafik kecepatan terhadap waktu, maka integral dari grafik tersebut akan memberikan total jarak yang ditempuh.

Itulah sebabnya integral sering dihubungkan dengan ide “luas” atau “akumulasi”. Integral juga bisa dipahami sebagai proses penjumlahan yang dilakukan terhadap potongan-potongan kecil.

Misalnya, ketika kita ingin menghitung luas daerah dengan bentuk tidak beraturan, kita bisa membagi daerah tersebut menjadi bagian-bagian kecil, menghitung luas tiap bagian, lalu menjumlahkannya. Semakin kecil potongan yang dibuat, hasilnya akan semakin mendekati luas sebenarnya. Konsep inilah yang menjadi inti dari integral.

Dalam sejarah matematika, integral dikembangkan bersamaan dengan turunan pada abad ke-17 oleh Newton dan Leibniz. Mereka menggunakan integral untuk menyelesaikan persoalan fisika, terutama yang berhubungan dengan gerak, gaya, dan luas. Hingga kini, integral masih menjadi salah satu alat utama dalam sains, teknik, dan ekonomi. Integral adalah salah satu konsep yang memiliki banyak wajah. Dalam dunia geometri, integral dipandang sebagai alat untuk menghitung luas, volume, atau panjang lintasan. Dalam fisika, integral dipakai untuk menghitung jarak dari kecepatan, menghitung usaha dari gaya, atau menghitung energi dari distribusi tertentu. Dalam ekonomi, integral digunakan untuk menghitung biaya total dari biaya marjinal, pendapatan total dari pendapatan marjinal, hingga menghitung surplus konsumen dan produsen. Dari berbagai sudut pandang ini, integral tidak hanya sekadar konsep matematis yang abstrak, tetapi sebuah alat praktis yang menjembatani teori dengan kenyataan.

Salah satu kekuatan integral adalah kemampuannya untuk mengatasi permasalahan yang tidak bisa diselesaikan dengan perhitungan biasa. Luas bangun datar sederhana seperti persegi panjang atau segitiga dapat dihitung dengan rumus yang kita kenal sejak sekolah dasar. Namun bagaimana jika bentuk bangun tersebut sangat tidak beraturan, misalnya bentuk daun, aliran sungai, atau grafik fungsi yang melengkung rumit? Dalam situasi seperti inilah integral berperan. Ia memungkinkan kita untuk tetap bisa menghitung total luas atau volume dengan cara "memecah" bentuk tersebut menjadi bagian-bagian kecil, lalu menjumlahkannya.

Konsep dasar inilah yang membuat integral sering disebut sebagai “penjumlahan tak terhingga”. Bukan berarti kita benar-benar menjumlahkan bilangan tak terhingga, melainkan kita menggunakan pendekatan matematika agar hasil dari penjumlahan bagian-bagian kecil itu mendekati nilai sebenarnya. Semakin kecil bagian yang kita ambil, semakin mendekati hasil riil yang kita peroleh. Inilah keindahan sekaligus kekuatan dari integral.

Integral juga memberikan pemahaman mendalam tentang hubungan antara perubahan kecil dan total keseluruhan. Jika turunan menjelaskan bagaimana sesuatu berubah pada momen tertentu, integral justru menceritakan bagaimana perubahan-perubahan kecil itu terkumpul menjadi total yang utuh. Bayangkan tetesan air hujan yang jatuh ke sebuah wadah. Satu tetes mungkin sangat kecil, tetapi jika kita menunggu cukup lama, ribuan tetesan kecil itu akan terkumpul menjadi air yang penuh. Proses akumulasi itulah yang dimodelkan oleh integral.

Selain itu, integral juga sangat erat kaitannya dengan kehidupan sehari-hari, meskipun sering kali kita tidak menyadarinya. Ketika kita mengendarai mobil dan melihat spidometer yang menunjukkan kecepatan, angka itu sebenarnya adalah hasil dari turunan posisi terhadap waktu. Jika kita ingin tahu seberapa jauh kita sudah berjalan, kita harus “mengintegralkan” kecepatan tersebut terhadap waktu. Begitu pula dalam dunia bisnis, perusahaan mungkin hanya tahu biaya tambahan untuk memproduksi satu unit barang (biaya marjinal), namun untuk mengetahui biaya total produksi, mereka perlu menjumlahkan semua biaya marjinal dari awal hingga jumlah tertentu. Proses inilah yang secara matematis diwujudkan dengan integral.

Sejarah integral yang dikembangkan oleh Newton dan Leibniz juga memberikan pelajaran menarik. Newton menggunakannya untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan fisika tentang gerak benda, gravitasi, dan gaya. Sedangkan Leibniz menekankan pada sistem notasi yang rapi dan mudah digunakan. Hingga kini, notasi yang diciptakan Leibniz untuk integral masih digunakan di seluruh dunia karena kesederhanaannya. Perkembangan ini menunjukkan betapa pentingnya integral tidak hanya sebagai alat hitung, tetapi juga sebagai konsep yang menyatukan berbagai bidang ilmu.

Dengan demikian, integral bisa dipandang sebagai sebuah "bahasa universal" yang menjelaskan bagaimana hal-hal kecil dapat menumpuk menjadi sesuatu yang besar. Ia bukan hanya sekadar alat matematis, tetapi sebuah cara berpikir yang mengajarkan kita bahwa totalitas selalu terbentuk dari hal-hal kecil yang konsisten.

2. Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah jenis integral yang tidak memiliki batas bawah maupun batas atas. Hasil dari integral tak tentu bukan berupa angka, melainkan berupa fungsi baru. Fungsi ini sering disebut sebagai fungsi primitif atau anti-turunan, karena pada dasarnya integral tak tentu adalah kebalikan dari turunan.

Ciri utama dari integral tak tentu adalah adanya konstanta integrasi. Hal ini karena dalam proses turunan, sebuah konstanta akan hilang. Misalnya, turunan dari "x kuadrat ditambah 5" maupun turunan dari "x kuadrat ditambah 10" sama-sama menghasilkan "2x". Maka, ketika kita melakukan proses kebalikan, kita tidak bisa memastikan nilai konstanta itu, sehingga kita menuliskannya dalam bentuk "ditambah C". Konstanta inilah yang membedakan integral tak tentu dengan integral tertentu.

Dalam praktik, integral tak tentu digunakan untuk membentuk fungsi asli dari suatu turunan yang sudah diketahui. Misalnya, jika dalam fisika kita mengetahui fungsi percepatan, maka dengan integral tak tentu kita bisa menemukan fungsi kecepatan. Jika kita mengetahui fungsi kecepatan, maka kita bisa menemukan fungsi posisi. Dengan demikian, integral tak tentu sangat berguna untuk melacak kembali bentuk fungsi dari besaran yang lebih mendasar.

Integral tak tentu juga sering dipakai untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam teknik, seperti menghitung arus listrik, perubahan temperatur, atau distribusi massa. Dalam ekonomi, integral tak tentu digunakan untuk menemukan fungsi total dari fungsi marginal, misalnya total biaya dari fungsi biaya marginal.

Integral tak tentu memiliki peranan yang sangat penting dalam berbagai bidang ilmu. Dalam banyak kasus, kita sering kali hanya mengetahui bagaimana sesuatu berubah, tetapi tidak mengetahui bentuk fungsi aslinya. Misalnya, dalam ilmu fisika kita bisa mengetahui percepatan sebuah benda dari hasil percobaan, tetapi yang lebih sering dibutuhkan adalah fungsi kecepatan atau bahkan fungsi posisi benda tersebut. Di sinilah integral tak tentu hadir sebagai jembatan, karena dengan mengintegralkan percepatan kita mendapatkan kecepatan, dan dengan mengintegralkan kecepatan kita mendapatkan posisi.

Sifat dasar integral tak tentu menjadikannya sebagai alat yang bisa "mengembalikan" sebuah fungsi dari informasi tentang perubahannya. Hubungan ini membuat integral tak tentu sering disebut sebagai anti-turunan. Jika turunan berbicara tentang perubahan sesaat, maka integral tak tentu berbicara tentang bagaimana perubahan itu bisa dirangkai kembali menjadi fungsi asal.

Dalam teknik dan rekayasa, integral tak tentu membantu memodelkan berbagai fenomena. Misalnya, pada aliran listrik, kadang kita hanya mengetahui bagaimana arus berubah terhadap waktu. Dari data tersebut, dengan integral tak tentu, kita bisa menemukan fungsi total muatan listrik yang mengalir. Demikian pula pada ilmu material, perubahan temperatur terhadap waktu atau posisi dapat diketahui melalui eksperimen, lalu integral tak tentu digunakan untuk mendapatkan fungsi temperatur secara menyeluruh. Dalam distribusi massa atau kepadatan suatu benda, integral tak tentu membantu kita menemukan fungsi massa dari data kepadatan yang diketahui.

Tidak hanya dalam sains dan teknik, dalam ekonomi pun integral tak tentu memainkan peranan penting. Konsep biaya marginal dan pendapatan marginal misalnya, adalah konsep turunan yang menjelaskan tambahan biaya atau tambahan pendapatan untuk setiap unit barang yang diproduksi atau dijual. Namun, yang sering dibutuhkan perusahaan adalah total biaya atau total pendapatan. Dengan menggunakan integral tak tentu, perusahaan dapat melacak kembali fungsi biaya total dari biaya marginal, atau fungsi pendapatan total dari pendapatan marginal. Dengan demikian, integral tak tentu menjembatani antara data perubahan kecil (marginal) dengan gambaran besar (total).

Keistimewaan lain dari integral tak tentu adalah kemampuannya menghasilkan sekumpulan fungsi, bukan hanya satu fungsi tunggal. Hal ini disebabkan oleh keberadaan konstanta integrasi. Jika kita bayangkan, sebuah keluarga fungsi yang berbeda hanya pada nilai konstanta, ketika diturunkan semuanya akan menghasilkan bentuk yang sama. Karena itu, integral tak tentu selalu menyimpan fleksibilitas dalam jawabannya. Kehadiran konstanta integrasi ini sekaligus menunjukkan bahwa integral tak tentu tidak memberikan jawaban "pasti" seperti halnya integral tertentu, melainkan memberikan sebuah generalisasi berupa kumpulan fungsi.

Dengan segala manfaatnya, integral tak tentu bisa dianggap sebagai salah satu alat konseptual yang memberi kita kemampuan untuk "membangun kembali" suatu fenomena dari data perubahan kecilnya. Ia mengajarkan bahwa dalam banyak hal, memahami totalitas tidak selalu harus dimulai dari keseluruhan, tetapi bisa juga dirangkai dari informasi perubahan-perubahan kecil yang ada di dalamnya.

3. Integral Tertentu

Integral tertentu adalah integral yang memiliki batas bawah dan batas atas. Hasil dari integral tertentu adalah angka, bukan fungsi. Angka tersebut menggambarkan total akumulasi dari suatu fungsi pada interval tertentu.

Gambaran paling sederhana dari integral tertentu adalah menghitung luas daerah di bawah kurva pada selang tertentu. Misalnya, kita ingin mengetahui berapa jarak yang ditempuh mobil dari detik nol sampai detik ke-lima, sementara kita memiliki fungsi kecepatan terhadap waktu. Dengan integral tertentu, kita bisa menghitung total jarak tempuh mobil tersebut pada interval waktu yang dimaksud.

Perbedaan penting dengan integral tak tentu adalah bahwa integral tertentu selalu menghasilkan nilai numerik. Nilai ini bisa positif, negatif, atau nol, tergantung posisi grafik fungsi terhadap sumbu mendatar. Jika grafik berada di atas sumbu mendatar, hasilnya positif. Jika di bawah, hasilnya negatif. Dan jika grafik berada tepat di sumbu mendatar, hasilnya bisa nol.

Integral tertentu memiliki banyak penerapan nyata. Dalam fisika, ia digunakan untuk menghitung usaha yang dilakukan oleh gaya, menghitung energi potensial, serta menghitung besaran akumulatif lainnya. Dalam teknik, integral tertentu dipakai untuk menghitung volume benda dengan bentuk yang kompleks, menghitung luas permukaan, serta berbagai aplikasi rekayasa lainnya. Dalam ekonomi, integral tertentu digunakan untuk menghitung surplus konsumen dan produsen, menghitung total pendapatan dalam periode tertentu, atau menghitung distribusi probabilitas.

Sifat-sifat integral tertentu juga membantu dalam perhitungan. Misalnya, jika batas bawah dan batas atas sama, maka hasilnya pasti nol. Jika batas ditukar, hasilnya akan berubah tanda. Integral pada interval yang panjang bisa dipecah menjadi integral pada beberapa interval kecil. Semua sifat ini membuat integral tertentu lebih fleksibel dalam penggunaannya.

Integral tertentu tidak hanya berhenti sebagai alat hitung matematis, tetapi juga sebagai konsep yang memberikan pemahaman mendalam tentang akumulasi. Ketika kita berbicara mengenai suatu besaran yang terus-menerus berubah, integral tertentu membantu kita mengetahui totalnya pada rentang tertentu. Inilah alasan mengapa integral tertentu sering dianggap sebagai “penjumlahan yang sempurna” dari potongan-potongan kecil suatu besaran dalam selang waktu atau selang ruang tertentu.

Salah satu keunggulan integral tertentu adalah kepastian hasilnya. Jika integral tak tentu memberikan jawaban dalam bentuk fungsi yang masih mengandung konstanta integrasi, maka integral tertentu memberikan jawaban berupa angka yang spesifik. Angka ini dapat langsung digunakan untuk menyelesaikan masalah nyata, misalnya menghitung berapa besar energi yang dikeluarkan mesin dalam waktu tertentu, atau menghitung berapa volume air yang mengalir melalui pipa dalam selang waktu tertentu.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak hal yang tanpa sadar berkaitan dengan integral tertentu. Contohnya ketika kita mengisi tangki air dengan laju aliran yang tidak tetap. Jika laju aliran bertambah atau berkurang seiring waktu, maka untuk mengetahui total volume air yang masuk ke dalam tangki, kita tidak bisa hanya mengandalkan perkalian sederhana antara laju rata-rata dan waktu. Yang kita butuhkan adalah perhitungan integral tertentu, karena ia mampu menampung perubahan laju tersebut dari awal hingga akhir.

Di bidang teknik, integral tertentu sangat penting dalam perancangan dan analisis. Insinyur sipil menggunakan integral untuk menghitung luas jembatan lengkung atau volume beton dalam struktur bangunan yang tidak beraturan. Insinyur mesin menggunakannya untuk menghitung energi dan daya yang dibutuhkan atau dihasilkan oleh sistem mekanik. Sementara itu, insinyur listrik menggunakan integral tertentu untuk menghitung total muatan yang mengalir dalam suatu rangkaian selama periode tertentu. Semua ini menunjukkan betapa integral tertentu adalah alat yang tidak tergantikan.

Dalam bidang sains, integral tertentu digunakan untuk mempelajari fenomena alam yang melibatkan akumulasi. Ahli kimia menggunakannya untuk menghitung konsentrasi total zat dalam reaksi yang laju perubahannya bervariasi. Ahli biologi menggunakannya untuk memperkirakan pertumbuhan populasi atau jumlah energi yang tersimpan dalam jaringan organisme. Ahli astronomi memakainya untuk menghitung lintasan planet atau distribusi massa bintang dalam galaksi.

Bidang ekonomi dan sosial pun tidak ketinggalan dalam memanfaatkan integral tertentu. Surplus konsumen dan produsen yang sering diajarkan dalam teori ekonomi mikro pada dasarnya merupakan hasil perhitungan integral tertentu. Dengan menghitung area di bawah atau di atas kurva permintaan dan penawaran, para ekonom bisa menentukan seberapa besar keuntungan atau kerugian yang dialami suatu kelompok. Begitu juga dalam statistik, integral tertentu menjadi dasar dari distribusi probabilitas. Ketika kita ingin menghitung peluang suatu kejadian dalam interval tertentu, kita sebenarnya sedang melakukan perhitungan integral.

Selain penerapannya yang luas, integral tertentu juga menarik dari sisi logika matematisnya. Sifat-sifatnya membuat perhitungan menjadi lebih fleksibel dan efisien. Misalnya, jika kita menghadapi perhitungan pada interval panjang yang rumit, kita bisa membaginya menjadi beberapa bagian kecil yang lebih mudah dihitung, lalu menjumlahkannya kembali. Sifat ini mencerminkan cara berpikir sistematis: masalah besar bisa diselesaikan dengan memecahnya menjadi bagian-bagian kecil.

Lebih jauh, integral tertentu juga mengajarkan kita sebuah filosofi penting: bahwa totalitas suatu fenomena tidak pernah lepas dari bagian-bagian kecil yang menyusunnya. Perubahan-perubahan kecil yang terjadi setiap saat, ketika dijumlahkan dari awal hingga akhir, akan membentuk gambaran utuh. Pemahaman ini relevan bukan hanya di bidang matematika, tetapi juga dalam cara kita melihat dunia. Misalnya, kesuksesan besar seseorang adalah hasil akumulasi dari usaha kecil yang konsisten, sama seperti halnya integral tertentu yang mengakumulasi potongan-potongan kecil hingga menghasilkan total yang besar.

Dengan demikian, integral tertentu bisa dipandang sebagai konsep yang bukan hanya memiliki makna matematis, tetapi juga filosofis. Ia mengajarkan kita tentang pentingnya melihat keseluruhan tanpa mengabaikan detail kecil. Ia juga mengingatkan kita bahwa perubahan sesaat mungkin tampak sepele, tetapi jika dikumpulkan secara terus-menerus, dapat menghasilkan sesuatu yang sangat besar dan bermakna.

Dari uraian ini, kita dapat menarik tiga pemahaman utama. Pertama, integral adalah konsep dalam kalkulus yang digunakan untuk menghitung akumulasi atau total, sering dipahami sebagai luas di bawah kurva. Kedua, integral tak tentu adalah integral tanpa batas bawah dan atas yang hasilnya berupa fungsi baru beserta konstanta integrasi. Ketiga, integral tertentu adalah integral dengan batas bawah dan atas yang hasilnya berupa angka, dan biasanya digunakan untuk menghitung luas, volume, atau akumulasi nyata pada interval tertentu

Ketiga konsep ini saling berkaitan dan sama-sama penting, baik dalam dunia matematika murni maupun dalam penerapan praktis. Integral membantu kita memahami fenomena yang melibatkan penjumlahan terus-menerus, baik itu jarak tempuh kendaraan, energi dalam sebuah sistem, pendapatan dalam ekonomi, maupun peluang dalam statistik.

MATERI IX

Aplikasi Integral dalam Ilmu Ekonomi

A. Tujuan Materi Pembelajaran

Adapun tujuan dari materi kuliah ini adalah sebagai berikut:

1. Mahasiswa mampu memahami konsep dasar integral dan kaitannya dengan turunan dalam konteks perhitungan ekonomi.
2. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian integral tak tentu serta fungsinya dalam membentuk fungsi total dari fungsi marginal, misalnya biaya marginal atau pendapatan marginal.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian integral tertentu serta peranannya dalam menghitung akumulasi besaran ekonomi, seperti total biaya, total pendapatan, atau surplus konsumen dan produsen.
4. Mahasiswa mampu mengidentifikasi perbedaan integral tak tentu dan integral tertentu dalam penerapannya pada masalah ekonomi.
5. Mahasiswa mengetahui dan mampu memberikan contoh nyata penerapan integral dalam bidang ekonomi, baik mikroekonomi maupun makroekonomi.

B. Materi Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda akan memahami:

1. Konsep integral secara umum sebagai kebalikan dari turunan dan sebagai alat untuk menghitung akumulasi dalam konteks ekonomi.
2. Integral tak tentu beserta ciri-cirinya, termasuk fungsi primitif dan konstanta integrasi, serta penggunaannya untuk memperoleh fungsi total dari fungsi marginal dalam ekonomi.

3. Integral tertentu beserta sifat-sifatnya dan pemahamannya sebagai alat untuk menghitung akumulasi dengan batas tertentu, misalnya menghitung pendapatan total pada periode tertentu.
4. Perbedaan integral tak tentu dan integral tertentu serta relevansinya dalam analisis ekonomi.
5. Penerapan integral dalam ilmu ekonomi, seperti menghitung biaya total dari biaya marginal, menghitung pendapatan total dari pendapatan marginal, menentukan surplus konsumen dan produsen, serta penerapan lain dalam analisis ekonomi.

Penjelasan Materi

1. Konsep Integral Secara Umum dalam Ekonomi

Integral merupakan kebalikan dari turunan. Jika turunan menjelaskan bagaimana suatu besaran berubah pada titik tertentu, maka integral menghitung bagaimana perubahan-perubahan kecil itu terakumulasi menjadi total. Integral dapat dipahami sebagai sebuah proses penjumlahan yang berkesinambungan, sebuah cara matematika untuk menghubungkan hal-hal kecil yang tampak sepele menjadi gambaran besar yang lebih utuh. Dalam ilmu kalkulus, integral sering dimaknai sebagai luas di bawah kurva, atau sebagai proses menghitung akumulasi dari bagian-bagian kecil yang jumlahnya sangat banyak.

Dalam ilmu ekonomi, konsep integral memainkan peran yang sangat penting karena banyak variabel ekonomi yang bersifat dinamis, berubah dari waktu ke waktu, atau bertambah seiring dengan bertambahnya unit barang dan jasa yang diproduksi maupun dikonsumsi. Perubahan-perubahan kecil ini biasanya dipahami dengan istilah marginal. Konsep marginal adalah salah satu pilar dalam teori ekonomi modern. Biaya marginal, pendapatan marginal, maupun utilitas marginal merupakan contoh konkret bagaimana para ekonom menjelaskan tambahan akibat perubahan satu unit saja. Biaya marginal misalnya, menggambarkan tambahan biaya ketika perusahaan memproduksi satu unit barang berikutnya. Pendapatan marginal menggambarkan tambahan pendapatan yang diperoleh dari penjualan satu unit tambahan barang. Sedangkan utilitas marginal menunjukkan tambahan kepuasan yang dirasakan konsumen ketika ia mengonsumsi satu unit tambahan barang atau jasa.

Informasi marginal bersifat lokal. Artinya, ia menjelaskan perubahan kecil pada titik tertentu, tetapi tidak memberikan informasi tentang jumlah keseluruhan. Padahal, dalam praktik ekonomi, yang lebih sering dibutuhkan justru adalah total. Perusahaan ingin tahu bukan hanya tambahan biaya untuk satu unit produksi, tetapi biaya total dari seluruh produksi yang dilakukan. Demikian pula, perusahaan tertarik bukan hanya pada tambahan pendapatan dari satu unit barang, melainkan berapa total pendapatan dari seluruh barang yang berhasil dijual. Konsumen juga tidak cukup puas dengan mengetahui utilitas marginal dari satu unit konsumsi, melainkan ingin memahami berapa utilitas total dari semua barang yang ia konsumsi. Di sinilah peran integral menjadi sangat vital, karena integral mampu mengubah informasi marginal yang bersifat parsial menjadi informasi total yang bersifat menyeluruh.

Integral tak tentu dalam konteks ekonomi digunakan untuk menemukan kembali fungsi total dari fungsi marginal. Misalnya, jika perusahaan mengetahui fungsi biaya marginal yang diperoleh dari pengamatan empiris atau hasil penelitian, maka melalui integral tak tentu dapat ditemukan fungsi biaya total. Hal ini dimungkinkan karena integral tak tentu menghasilkan fungsi baru yang disebut fungsi primitif, yaitu fungsi asal dari sebuah turunan. Di dalam integral tak tentu selalu ada tambahan konstanta integrasi, yang melambangkan bahwa terdapat banyak kemungkinan fungsi total yang berbeda tetapi semuanya memiliki turunan yang sama. Dalam praktik ekonomi, konstanta ini biasanya ditentukan dari data awal yang dimiliki perusahaan, misalnya biaya tetap atau fixed cost.

Sementara itu, integral tertentu digunakan ketika perusahaan atau analis ekonomi ingin mengetahui total pada rentang tertentu.

Integral tertentu memiliki batas bawah dan batas atas, sehingga hasilnya adalah angka spesifik. Angka ini menggambarkan akumulasi pada interval tertentu. Misalnya, sebuah perusahaan ingin mengetahui berapa total pendapatan yang diperoleh dari penjualan barang mulai dari unit ke-100 sampai dengan unit ke-200. Jika perusahaan memiliki informasi tentang pendapatan marginal, maka integral tertentu dapat digunakan untuk menghitung total pendapatan pada interval tersebut. Hasilnya akan berupa nilai numerik yang langsung bisa dipakai dalam analisis bisnis.

Integral tertentu juga menjadi alat utama untuk menghitung surplus konsumen dan surplus produsen dalam teori ekonomi mikro. Surplus konsumen adalah keuntungan tambahan yang diperoleh konsumen karena mereka bersedia membayar harga lebih tinggi dari harga pasar, tetapi pada kenyataannya hanya membayar harga pasar yang lebih rendah. Surplus produsen adalah keuntungan tambahan yang diperoleh produsen karena mereka menjual dengan harga pasar yang lebih tinggi dibanding biaya minimum yang mereka tanggung. Keduanya dihitung dengan memanfaatkan integral tertentu, karena melibatkan perhitungan area di bawah atau di atas kurva permintaan dan penawaran dalam batas tertentu.

Penerapan integral dalam ekonomi tidak hanya terbatas pada biaya, pendapatan, dan surplus. Dalam analisis makroekonomi, integral juga digunakan untuk menghitung pertumbuhan total dari tingkat pertumbuhan marginal. Misalnya, jika diketahui tingkat pertumbuhan penduduk atau tingkat pertumbuhan produksi nasional pada setiap saat, maka integral dapat digunakan untuk menghitung jumlah total penduduk atau total produk domestik bruto pada periode tertentu. Dalam ekonomi keuangan, integral juga digunakan untuk menghitung nilai sekarang dan nilai masa depan dari arus kas yang terus menerus, serta untuk menganalisis distribusi probabilitas dalam pengambilan keputusan yang penuh ketidakpastian.

Keunggulan integral dalam ekonomi adalah kemampuannya menghubungkan data lokal dengan gambaran global. Data marginal sering kali lebih mudah didapatkan melalui observasi langsung. Perusahaan lebih mudah mengetahui berapa tambahan biaya ketika menambah produksi satu unit barang dibandingkan harus menghitung total biaya seluruh produksi secara langsung. Namun, dengan integral, informasi kecil tersebut dapat diolah menjadi informasi menyeluruh yang lebih bermanfaat untuk pengambilan keputusan strategis.

Sifat-sifat integral juga mendukung penggunaannya dalam analisis ekonomi. Misalnya, integral dari batas yang sama akan menghasilkan nol, yang dalam konteks ekonomi dapat diartikan bahwa tidak ada perubahan total jika tidak ada perubahan jumlah barang atau waktu. Jika batas bawah dan batas atas ditukar, hasil integral akan berubah tanda, yang secara konseptual menggambarkan arah perhitungan yang berbeda. Integral pada interval panjang bisa dipecah menjadi beberapa interval kecil, yang sejalan dengan logika ekonomi bahwa analisis periode panjang bisa dilakukan dengan membagi menjadi periode-periode pendek.

Jika kita refleksikan lebih dalam, integral dalam ekonomi bukan sekadar perhitungan matematis, melainkan juga sebuah filosofi. Ia mengajarkan bahwa totalitas selalu dibentuk dari akumulasi hal-hal kecil. Setiap tambahan kecil dari biaya, setiap tambahan kecil dari pendapatan, dan setiap tambahan kecil dari utilitas, jika dikumpulkan secara konsisten, akan menghasilkan total yang besar. Hal ini serupa dengan bagaimana kesuksesan ekonomi suatu bangsa terbentuk dari akumulasi keputusan-keputusan kecil yang diambil individu maupun perusahaan.

Sejarah penggunaan integral dalam ilmu ekonomi juga cukup panjang. Sejak abad ke-19, para ekonom klasik mulai menggunakan alat kalkulus untuk menjelaskan hukum permintaan dan penawaran, biaya produksi, serta distribusi pendapatan. Alfred Marshall, salah satu tokoh besar dalam ekonomi mikro, sangat menekankan penggunaan kurva permintaan dan penawaran yang melibatkan konsep luas area di bawah kurva, yang sebenarnya adalah konsep integral tertentu. Hingga kini, hampir semua cabang ekonomi modern, baik mikro maupun makro, baik ekonomi terapan maupun teori permainan, menggunakan integral dalam analisisnya.

Jika kita masuk lebih jauh ke dalam contoh konkret, bayangkan sebuah perusahaan yang bergerak di bidang manufaktur. Perusahaan ini mengetahui bahwa biaya untuk memproduksi setiap unit tambahan barang cenderung meningkat seiring bertambahnya jumlah produksi, karena sumber daya semakin terbatas. Data yang dimiliki adalah fungsi biaya marginal. Dengan integral, perusahaan dapat menghitung berapa biaya total untuk memproduksi 1000 unit barang. Hasil ini tidak hanya berguna untuk menghitung harga jual minimum agar tidak merugi, tetapi juga penting untuk menentukan strategi produksi jangka panjang.

Contoh lain, sebuah perusahaan ritel ingin mengetahui berapa total pendapatan dari penjualan antara bulan pertama hingga bulan keenam. Perusahaan hanya mengetahui pendapatan marginal yang menunjukkan tambahan pendapatan pada setiap periode. Dengan integral tertentu, perusahaan dapat menghitung total pendapatan selama enam bulan penuh. Dari hasil itu, manajemen bisa menentukan strategi promosi, menentukan target penjualan, atau menilai efektivitas strategi pemasaran yang sudah dijalankan.

Dalam analisis konsumen, integral juga berperan penting. Jika kita mengetahui fungsi permintaan konsumen terhadap suatu barang, integral dapat digunakan untuk menghitung total kepuasan atau utilitas yang diperoleh konsumen dari mengonsumsi sejumlah barang tertentu. Dengan demikian, integral membantu para ekonom memahami perilaku konsumen secara lebih menyeluruh, tidak hanya berdasarkan tambahan kepuasan dari satu unit konsumsi.

Pada bidang keuangan, integral menjadi alat penting dalam menghitung nilai instrumen keuangan yang memiliki arus kas berkesinambungan. Misalnya, dalam analisis obligasi atau instrumen investasi lain, arus kas sering kali bersifat terus menerus, bukan diskret. Dengan integral, analis keuangan dapat menghitung nilai sekarang dari arus kas tersebut, yang menjadi dasar pengambilan keputusan investasi.

Dengan berbagai uraian tersebut, jelaslah bahwa integral bukan hanya konsep matematis abstrak, melainkan alat analisis yang nyata dalam ekonomi. Integral membantu para ekonom dan pelaku bisnis menjembatani data marginal dengan informasi total, membantu mengubah gambaran lokal menjadi gambaran global, serta membantu memahami bagaimana hal-hal kecil jika dikumpulkan dapat menghasilkan sesuatu yang besar.

2. Integral Tak Tentu dalam Ekonomi

Integral tak tentu adalah jenis integral yang tidak memiliki batas bawah maupun batas atas. Berbeda dengan integral tertentu yang menghasilkan angka pasti, integral tak tentu menghasilkan sebuah fungsi baru yang disebut fungsi primitif atau anti-turunan. Fungsi ini merupakan kebalikan dari proses turunan. Karena sifat turunan yang membuat konstanta selalu hilang, maka hasil integral tak tentu selalu dilengkapi dengan konstanta integrasi yang dituliskan dalam bentuk "+ C". Konstanta ini menunjukkan bahwa ada sekumpulan fungsi yang berbeda tetapi memiliki turunan yang sama. Dengan kata lain, integral tak tentu tidak memberikan satu jawaban tunggal, melainkan memberikan sebuah keluarga fungsi yang semuanya valid.

Dalam ilmu ekonomi, keberadaan integral tak tentu sangatlah penting. Banyak sekali persoalan ekonomi yang berangkat dari informasi marginal. Konsep marginal sendiri adalah inti dari analisis ekonomi modern. Biaya marginal misalnya, menunjukkan tambahan biaya yang harus dikeluarkan perusahaan untuk memproduksi satu unit barang tambahan. Pendapatan marginal menggambarkan tambahan penerimaan yang diperoleh perusahaan dari menjual satu unit barang berikutnya. Utilitas marginal menjelaskan tambahan kepuasan yang diperoleh konsumen dari mengonsumsi satu unit tambahan barang atau jasa. Semua informasi tersebut sangat berguna, tetapi hanya bersifat lokal, artinya hanya menjelaskan perubahan kecil di sekitar satu titik tertentu.

Agar seorang ekonom atau pelaku bisnis dapat membuat keputusan yang lebih komprehensif, ia perlu mengetahui bukan hanya tambahan kecil tersebut, melainkan total keseluruhan. Perusahaan tentu tidak cukup hanya mengetahui berapa biaya marginal untuk satu unit produksi. Yang lebih penting adalah berapa biaya total dari seluruh produksi yang dilakukan. Demikian pula, informasi mengenai pendapatan marginal memang bermanfaat, tetapi lebih relevan jika diterjemahkan menjadi pendapatan total yang benar-benar diterima perusahaan. Untuk melakukan peralihan dari marginal menuju total inilah integral tak tentu digunakan.

Sebagai contoh, bayangkan sebuah perusahaan manufaktur yang sedang memproduksi seribu unit barang. Perusahaan ini mengetahui dengan jelas berapa tambahan biaya setiap kali mereka menambah satu unit produksi. Misalnya, untuk unit pertama tambahan biaya sangat kecil, tetapi seiring bertambahnya jumlah produksi, biaya tambahan mulai meningkat karena penggunaan sumber daya semakin padat. Informasi ini dituangkan dalam fungsi biaya marginal. Namun, pihak manajemen tentu ingin mengetahui berapa biaya total yang dikeluarkan untuk memproduksi keseluruhan seribu unit barang. Melalui integral tak tentu, fungsi biaya marginal dapat "dikembalikan" menjadi fungsi biaya total. Dengan begitu, perusahaan tidak hanya tahu tambahan biaya per unit, tetapi juga bisa menghitung biaya kumulatif secara menyeluruh.

Hal yang sama berlaku pada pendapatan. Sebuah toko mungkin tahu bahwa setiap unit tambahan barang yang dijual memberikan tambahan pendapatan tertentu. Informasi ini disebut pendapatan marginal. Namun, untuk membuat strategi bisnis, yang dibutuhkan adalah pendapatan total dari keseluruhan barang yang berhasil dijual. Dengan integral tak tentu, pendapatan marginal dapat diubah menjadi fungsi pendapatan total. Informasi ini sangat berguna dalam menyusun laporan keuangan, memperkirakan keuntungan, serta menentukan strategi harga dan produksi.

Integral tak tentu juga bermanfaat dalam analisis konsumen. Jika kita mengetahui fungsi utilitas marginal, yaitu tambahan kepuasan yang diperoleh konsumen setiap kali mengonsumsi satu unit barang tambahan, maka dengan integral tak tentu kita bisa menemukan fungsi utilitas total. Fungsi utilitas total ini penting untuk memahami perilaku konsumsi secara menyeluruh, bukan hanya kepuasan tambahan pada titik tertentu. Dengan demikian, integral tak tentu membantu para ekonom menjembatani pemahaman dari level marginal menuju level total.

Keberadaan konstanta integrasi dalam hasil integral tak tentu juga memiliki makna dalam ekonomi. Misalnya, ketika perusahaan menghitung fungsi biaya total dari biaya marginal, hasil integral hanya memberikan biaya variabel total. Agar biaya total benar-benar lengkap, perusahaan perlu menambahkan biaya tetap (fixed cost) yang tidak berubah meskipun jumlah produksi bertambah. Biaya tetap inilah yang berperan sebagai konstanta dalam fungsi biaya total. Dengan cara ini, konstanta integrasi yang pada awalnya bersifat abstrak dalam matematika, mendapatkan interpretasi nyata dalam ekonomi.

Dengan kata lain, integral tak tentu bukan hanya alat matematis yang bersifat teoritis, melainkan juga sangat praktis dalam aplikasi ekonomi. Ia memungkinkan para ekonom, manajer, maupun analis keuangan untuk membangun kembali gambaran menyeluruh dari data perubahan kecil yang bisa diamati. Jika tanpa integral, informasi marginal mungkin hanya akan menjadi potongan kecil yang terpisah-pisah. Dengan integral, semua potongan kecil itu dapat digabungkan menjadi sebuah fungsi total yang lengkap dan lebih bermakna.

Selain pada biaya dan pendapatan, integral tak tentu juga sering dipakai dalam bidang ekonomi lainnya. Misalnya dalam analisis pertumbuhan ekonomi, tingkat pertumbuhan dapat dianggap sebagai "marginal" dari total output atau produk domestik bruto (PDB).

Dengan mengintegralkan fungsi pertumbuhan, para ekonom dapat memperkirakan besarnya PDB total dalam periode tertentu. Begitu pula dalam ekonomi keuangan, tingkat bunga marjinal atau arus kas marjinal dapat diintegralkan untuk memperoleh nilai total dari investasi atau portofolio.

Dengan semua penjelasan ini, jelaslah bahwa integral tak tentu tidak hanya sekadar konsep matematis abstrak, tetapi juga merupakan alat penting dalam analisis ekonomi. Ia menjembatani antara informasi kecil pada level marginal dengan gambaran besar pada level total. Ia juga memberi fleksibilitas dengan adanya konstanta integrasi yang dapat disesuaikan dengan kondisi nyata, misalnya biaya tetap, pendapatan awal, atau nilai dasar lain yang relevan. Dalam praktiknya, integral tak tentu membuat analisis ekonomi menjadi lebih utuh, sistematis, dan relevan dengan kenyataan di lapangan.

3. Integral Tertentu dalam Ekonomi

Berbeda dengan integral tak tentu yang menghasilkan sebuah fungsi baru, integral tertentu memiliki batas bawah dan batas atas, sehingga hasil akhirnya berupa angka spesifik. Angka ini merepresentasikan total akumulasi suatu besaran dalam selang atau interval tertentu. Secara konseptual, integral tertentu dapat dibayangkan sebagai penjumlahan yang berkesinambungan dari potongan-potongan kecil di dalam rentang tertentu, sehingga menghasilkan sebuah nilai pasti.

Dalam konteks ekonomi, integral tertentu memegang peranan penting karena sebagian besar analisis ekonomi tidak hanya memerlukan gambaran umum, tetapi membutuhkan angka yang konkret. Seorang manajer perusahaan, misalnya, tidak cukup hanya mengetahui bentuk fungsi pendapatan total secara umum, melainkan ingin mengetahui dengan tepat berapa pendapatan yang diperoleh selama periode tertentu, atau berapa biaya yang dikeluarkan untuk memproduksi sejumlah barang tertentu. Untuk tujuan inilah integral tertentu digunakan.

Salah satu contoh yang paling sederhana adalah menghitung total pendapatan dari penjualan barang pada rentang jumlah tertentu. Misalnya, sebuah perusahaan ingin mengetahui berapa total pendapatan dari penjualan antara unit ke-100 hingga unit ke-200. Jika perusahaan hanya memiliki informasi mengenai fungsi pendapatan marginal, maka melalui integral tertentu, data marginal tersebut dapat dijumlahkan secara berkesinambungan dalam interval seratus unit tersebut. Hasilnya adalah sebuah angka yang spesifik, yang langsung menunjukkan berapa total pendapatan dalam rentang produksi yang ditentukan. Angka ini tentu sangat bermanfaat dalam pengambilan keputusan, misalnya untuk menentukan apakah produksi tambahan dalam jumlah tertentu masih menguntungkan atau justru merugikan.

Hal yang sama berlaku untuk biaya produksi. Perusahaan sering kali memiliki data biaya marginal, yaitu tambahan biaya untuk setiap unit tambahan produksi. Namun, dalam praktik bisnis, yang dibutuhkan adalah total biaya untuk memproduksi seluruh barang dalam jumlah tertentu. Dengan integral tertentu, perusahaan dapat menghitung total biaya produksi dalam interval tertentu, misalnya dari unit pertama hingga unit keseribu. Dengan cara ini, manajemen bisa mengetahui dengan jelas berapa biaya yang dibutuhkan untuk mencapai tingkat produksi tertentu, sekaligus menilai apakah biaya tersebut sebanding dengan pendapatan yang diperoleh.

Integral tertentu juga berguna dalam menghitung keuntungan total. Keuntungan dalam ekonomi secara sederhana dapat dipahami sebagai selisih antara pendapatan total dan biaya total. Jika kita memiliki informasi mengenai pendapatan marginal dan biaya marginal, maka dengan integral tertentu kita dapat menghitung pendapatan total dan biaya total dalam suatu interval, lalu menentukan berapa keuntungan bersih pada periode tersebut. Informasi ini sangat vital dalam analisis kelayakan usaha, perencanaan strategi produksi, maupun pengambilan keputusan investasi.

Selain biaya, pendapatan, dan keuntungan, integral tertentu juga sering digunakan dalam analisis kesejahteraan ekonomi, khususnya dalam menghitung surplus konsumen dan surplus produsen. Surplus konsumen adalah perbedaan antara kesediaan konsumen membayar harga barang tertentu dengan harga pasar yang sebenarnya mereka bayarkan. Surplus produsen adalah selisih antara harga pasar dengan biaya minimum yang bersedia ditanggung produsen. Kedua surplus ini dihitung dengan mencari luas area di bawah atau di atas kurva permintaan dan penawaran dalam interval tertentu, yang secara matematis direpresentasikan oleh integral tertentu.

Dalam makroekonomi, integral tertentu dapat digunakan untuk menghitung pertumbuhan total dari tingkat pertumbuhan yang bervariasi sepanjang waktu. Misalnya, jika laju pertumbuhan ekonomi suatu negara diketahui dalam bentuk fungsi yang berubah-ubah dari waktu ke waktu, maka dengan integral tertentu dapat dihitung total pertumbuhan ekonomi dalam periode tertentu. Hal yang sama berlaku dalam demografi, di mana integral tertentu digunakan untuk menghitung jumlah penduduk total berdasarkan tingkat pertumbuhan yang bervariasi dari tahun ke tahun.

Integral tertentu juga memainkan peran penting dalam ekonomi keuangan. Banyak instrumen keuangan, seperti obligasi atau derivatif, menghasilkan arus kas yang berkesinambungan. Untuk menghitung nilai total arus kas tersebut dalam periode tertentu, analis keuangan menggunakan integral tertentu. Dengan cara ini, mereka dapat memperkirakan nilai investasi secara lebih akurat, mempertimbangkan faktor waktu, serta menentukan strategi investasi yang tepat.

Jika kita menelaah lebih jauh, integral tertentu pada dasarnya adalah jembatan antara teori marginal dengan realitas ekonomi yang bersifat total dan terukur. Ia tidak hanya memberikan gambaran konseptual, tetapi juga hasil praktis berupa angka yang bisa langsung dipakai dalam analisis dan pengambilan keputusan. Tanpa integral tertentu, data marginal mungkin hanya menjadi informasi parsial yang sulit dimanfaatkan secara penuh. Dengan integral tertentu, informasi kecil itu dapat dijumlahkan menjadi angka total yang utuh.

Sifat-sifat integral tertentu juga membuatnya sangat fleksibel dalam penerapan ekonomi. Misalnya, jika kita menghitung total pendapatan dalam interval tertentu, kita bisa memecah interval panjang menjadi beberapa interval kecil, lalu menjumlahkan hasilnya. Hal ini sejalan dengan logika bisnis yang sering membagi analisis keuangan menjadi periode triwulanan atau bulanan. Demikian pula, perubahan tanda hasil integral ketika batas dibalik dapat diartikan secara ekonomis sebagai perubahan arah perhitungan atau perbedaan antara menghitung tambahan versus menghitung pengurangan.

Dengan demikian, integral tertentu tidak hanya sekadar konsep matematika, tetapi juga alat praktis yang sangat berguna dalam ekonomi. Ia membantu menghitung total pendapatan, total biaya, dan total keuntungan dalam rentang tertentu. Ia juga memungkinkan analisis kesejahteraan konsumen dan produsen, serta penerapan di bidang makroekonomi dan keuangan. Integral tertentu mengajarkan bahwa untuk memahami totalitas, kita perlu memperhatikan setiap perubahan kecil, lalu mengakumulasikannya dalam interval yang kita pilih.

4. Perbedaan Integral Tak Tentu dan Integral Tertentu dalam Ekonomi

Perbedaan mendasar antara integral tak tentu dan integral tertentu dapat dipahami dengan jelas apabila kita menempatkannya dalam kerangka analisis ekonomi. Integral tak tentu pada dasarnya menghasilkan sebuah fungsi umum. Fungsi ini berguna untuk membentuk kembali fungsi total dari informasi yang hanya tersedia dalam bentuk marginal. Sebagai contoh, jika seorang ekonom atau perusahaan hanya mengetahui fungsi biaya marginal, yaitu tambahan biaya yang muncul ketika satu unit barang tambahan diproduksi, maka dengan melakukan integral tak tentu ia dapat membentuk fungsi biaya total. Fungsi biaya total inilah yang menjadi model matematis yang menggambarkan keseluruhan struktur biaya perusahaan pada setiap tingkat produksi. Dalam kasus lain, jika yang tersedia adalah fungsi pendapatan marginal, maka melalui integral tak tentu kita dapat memperoleh fungsi pendapatan total. Dengan kata lain, integral tak tentu lebih menekankan pada pencarian bentuk umum atau model konseptual yang bisa dipakai sebagai dasar analisis ekonomi lebih lanjut.

Sebaliknya, integral tertentu lebih menekankan pada hasil akhir berupa angka spesifik yang menggambarkan akumulasi nyata dalam suatu interval tertentu. Jika integral tak tentu dipandang sebagai peta umum yang menunjukkan bentuk hubungan antara variabel marginal dengan variabel total, maka integral tertentu adalah perhitungan nyata yang memberikan nilai numerik pada rentang yang diinginkan. Misalnya, seorang manajer perusahaan ingin mengetahui berapa total pendapatan dari penjualan antara unit ke-100 hingga unit ke-200. Informasi pendapatan marginal yang dimiliki tidak cukup, karena hanya menggambarkan tambahan pendapatan pada setiap titik. Dengan integral tertentu, perusahaan dapat menghitung total akumulasi pendapatan pada rentang unit tersebut, sehingga diperoleh angka yang konkret dan siap digunakan dalam evaluasi bisnis. Hal serupa juga berlaku ketika perusahaan ingin menghitung total biaya produksi untuk sejumlah unit barang tertentu. Integral tertentu menyediakan nilai numerik yang relevan dan praktis bagi pengambilan keputusan.

Dari perbandingan ini, tampak bahwa integral tak tentu lebih bersifat konseptual dan teoretis, sedangkan integral tertentu lebih bersifat praktis dan aplikatif. Integral tak tentu digunakan pada tahap awal, yaitu untuk membangun model matematis fungsi ekonomi berdasarkan data marginal. Model inilah yang nantinya menjadi kerangka kerja dalam analisis, misalnya fungsi biaya total atau fungsi pendapatan total. Sementara itu, integral tertentu digunakan pada tahap penerapan, yakni ketika seorang ekonom, manajer, atau analis membutuhkan nilai akumulasi yang konkret untuk tujuan perhitungan, evaluasi, maupun pengambilan keputusan.

Perbedaan orientasi ini juga mencerminkan dua sisi penting dalam analisis ekonomi. Di satu sisi, seorang ekonom memerlukan model matematis yang tepat untuk menggambarkan hubungan antar variabel. Di sinilah integral tak tentu berperan penting. Namun di sisi lain, dalam praktik sehari-hari, baik di dunia bisnis maupun kebijakan publik, yang dibutuhkan adalah angka-angka spesifik yang dapat dijadikan dasar keputusan. Di sinilah integral tertentu berperan memberikan jawaban yang praktis.

Dengan demikian, meskipun keduanya sama-sama merupakan konsep integral, integral tak tentu dan integral tertentu memiliki peran yang saling melengkapi. Integral tak tentu menyiapkan landasan konseptual berupa model fungsi total, sedangkan integral tertentu memberikan hasil numerik yang spesifik dalam interval yang ditentukan. Kombinasi keduanya menjadikan analisis ekonomi lebih utuh, karena mampu menghubungkan teori dengan praktik, serta mampu menjembatani data marginal yang bersifat parsial dengan keputusan ekonomi yang bersifat menyeluruh.

5. Penerapan Integral dalam Ilmu Ekonomi

Integral merupakan salah satu konsep matematika yang memiliki peran sangat penting dalam ilmu ekonomi. Ia bukan sekadar alat hitung abstrak, melainkan sarana praktis yang mampu menjembatani antara teori ekonomi dengan kebutuhan analisis nyata di lapangan. Dalam banyak kasus, informasi yang tersedia dalam dunia ekonomi sering kali hanya berbentuk data marginal, yaitu data yang menunjukkan tambahan atau perubahan kecil pada suatu besaran. Akan tetapi, seorang ekonom, pengambil kebijakan, ataupun manajer perusahaan membutuhkan informasi total yang bersifat menyeluruh. Di sinilah integral bekerja sebagai alat akumulasi yang menghubungkan data marginal dengan data total.

Salah satu penerapan integral yang paling sering dijumpai adalah dalam menghitung biaya total dari biaya marginal. Dalam teori produksi, biaya marginal menggambarkan tambahan biaya yang harus ditanggung perusahaan ketika memproduksi satu unit barang tambahan. Informasi biaya marginal sangat penting karena dapat menunjukkan efisiensi produksi serta memberi sinyal kapan produksi tambahan mulai tidak lagi menguntungkan. Namun, bagi perusahaan, yang dibutuhkan bukan hanya informasi tambahan biaya per unit, melainkan juga total biaya yang dikeluarkan untuk sejumlah unit barang tertentu. Dengan menggunakan integral tak tentu, perusahaan dapat membentuk fungsi biaya total berdasarkan fungsi biaya marginal. Setelah fungsi biaya total ini terbentuk, integral tertentu dapat digunakan untuk menghitung total biaya produksi dalam interval produksi tertentu. Dengan cara ini, integral menjadi alat yang mengubah informasi marginal yang bersifat parsial menjadi informasi total yang bersifat menyeluruh dan konkret.

Penerapan lain yang tidak kalah penting adalah dalam menghitung pendapatan total dari pendapatan marginal. Pendapatan marginal adalah tambahan pendapatan yang diterima perusahaan ketika menjual satu unit barang tambahan. Sama halnya dengan biaya marginal, informasi pendapatan marginal memberikan gambaran mengenai kontribusi kecil pada setiap unit penjualan. Akan tetapi, bagi perusahaan, pertanyaan yang lebih relevan adalah berapa total pendapatan yang diperoleh dari sejumlah barang yang dijual. Dengan integral tak tentu, pendapatan marginal dapat diakumulasikan menjadi fungsi pendapatan total. Selanjutnya, jika perusahaan ingin mengetahui berapa pendapatan yang dihasilkan pada interval penjualan tertentu, integral tertentu dapat digunakan untuk menghitung total pendapatan pada interval yang diinginkan. Misalnya, perusahaan dapat menghitung berapa pendapatan total yang diperoleh dari penjualan antara unit ke-100 hingga unit ke-500. Hasilnya adalah angka konkret yang sangat penting dalam evaluasi kinerja bisnis maupun perencanaan produksi.

Selain dalam konteks biaya dan pendapatan, integral juga memiliki peran yang sangat signifikan dalam analisis kesejahteraan ekonomi, khususnya dalam perhitungan surplus konsumen. Surplus konsumen adalah selisih antara kesediaan konsumen untuk membayar suatu barang atau jasa dengan harga pasar yang sebenarnya dibayar. Kurva permintaan mencerminkan tingkat kesediaan membayar konsumen pada berbagai tingkat kuantitas. Untuk menghitung total surplus konsumen, kita perlu menghitung luas daerah antara kurva permintaan dan garis harga pasar, pada interval kuantitas yang terjual. Perhitungan luas daerah inilah yang dilakukan dengan integral tertentu. Dengan demikian, integral menjadi alat utama dalam mengukur seberapa besar manfaat tambahan yang diperoleh konsumen dalam suatu pasar. Informasi ini tidak hanya berguna bagi akademisi, tetapi juga bagi pemerintah dalam menilai efisiensi suatu kebijakan harga maupun pajak.

Tidak hanya konsumen, produsen pun memiliki surplus yang dapat dihitung dengan bantuan integral. Surplus produsen adalah keuntungan tambahan yang diperoleh produsen karena harga pasar lebih tinggi daripada biaya minimum yang mereka bersedia terima. Kurva penawaran mencerminkan biaya produksi minimum untuk setiap tingkat kuantitas. Dengan menggunakan integral tertentu, kita dapat menghitung luas daerah antara garis harga pasar dan kurva penawaran pada interval kuantitas yang relevan. Hasil perhitungan ini menggambarkan total surplus produsen. Dalam praktiknya, informasi mengenai surplus produsen sering dipakai untuk mengevaluasi keuntungan pasar secara keseluruhan, menilai keseimbangan ekonomi, serta menilai dampak kebijakan seperti subsidi atau pajak terhadap keuntungan produsen.

Penerapan integral dalam ekonomi tidak berhenti pada biaya, pendapatan, dan surplus saja. Dalam bidang ekonomi keuangan, integral juga digunakan dalam menghitung distribusi probabilitas. Banyak fenomena ekonomi, seperti risiko investasi, fluktuasi harga saham, maupun perhitungan premi asuransi, melibatkan distribusi probabilitas yang kontinyu. Untuk menghitung peluang suatu kejadian pada rentang tertentu, diperlukan integral dari fungsi distribusi probabilitas tersebut. Misalnya, seorang investor mungkin ingin mengetahui peluang bahwa tingkat pengembalian investasinya berada antara 5% hingga 10%. Jawaban atas pertanyaan ini hanya bisa diperoleh dengan menghitung integral tertentu dari fungsi distribusi probabilitas pada interval tersebut. Dengan cara ini, integral menjadi alat penting dalam analisis risiko dan pengambilan keputusan di bidang keuangan.

Dalam teori permainan dan analisis ekonomi modern, integral juga berperan dalam menghitung nilai harapan atau ekspektasi dari suatu variabel acak. Ekspektasi inilah yang sering menjadi dasar bagi individu maupun perusahaan dalam membuat keputusan strategis. Misalnya, ketika perusahaan menghadapi ketidakpastian permintaan, mereka dapat menggunakan integral untuk menghitung nilai harapan dari keuntungan berdasarkan distribusi probabilitas permintaan. Dengan informasi ini, perusahaan dapat merumuskan strategi produksi yang lebih bijak dan mengurangi potensi kerugian akibat ketidakpastian pasar.

Selain itu, integral juga banyak dipakai dalam perhitungan makroekonomi, misalnya untuk menghitung pertumbuhan total dari tingkat pertumbuhan marginal suatu variabel ekonomi, seperti pendapatan nasional atau konsumsi agregat. Dengan model fungsi pertumbuhan marginal, integral dapat digunakan untuk memperoleh besaran total yang mencerminkan kondisi ekonomi suatu negara. Hal ini berguna dalam menyusun kebijakan fiskal, moneter, maupun pembangunan jangka panjang.

Jika kita perhatikan lebih jauh, penerapan integral dalam ekonomi pada dasarnya selalu bermuara pada dua hal utama: pertama, mengubah informasi marginal yang bersifat parsial menjadi fungsi total yang menyeluruh; kedua, menghitung nilai akumulasi pada interval tertentu untuk memperoleh angka yang konkret. Dari dua peran utama ini, muncullah berbagai aplikasi yang lebih spesifik, seperti menghitung biaya total, pendapatan total, surplus konsumen dan produsen, probabilitas, maupun pertumbuhan agregat.

Kekuatan integral dalam analisis ekonomi juga terlihat dari kemampuannya memberikan gambaran visual melalui grafik. Ketika kita menggambarkan fungsi permintaan dan penawaran pada sebuah grafik, area di bawah atau di antara kurva tersebut memiliki interpretasi ekonomi yang penting. Integral menyediakan cara formal untuk menghitung area tersebut, sehingga analisis tidak hanya bersifat kualitatif, tetapi juga kuantitatif. Misalnya, surplus konsumen bukan sekadar "selisih" antara kesediaan membayar dan harga pasar, tetapi benar-benar dapat dihitung nilainya dengan presisi menggunakan integral.

Lebih jauh lagi, integral juga menjadi dasar bagi perkembangan analisis ekonomi lanjutan, seperti ekonomi diferensial, teori kontrol optimal, maupun analisis dinamis dalam ekonomi. Dalam bidang ini, integral digunakan untuk merumuskan model matematika yang kompleks, misalnya model pertumbuhan Solow, model konsumsi intertemporal, atau perhitungan nilai sekarang bersih (net present value) dari suatu aliran kas. Semua analisis ini membutuhkan konsep integral, baik untuk menjumlahkan aliran kas yang berkelanjutan, menghitung nilai diskonto, maupun merumuskan fungsi tujuan dalam optimisasi.

Dengan seluruh penerapan tersebut, jelaslah bahwa integral bukanlah konsep abstrak yang hanya hidup di ruang kelas matematika. Sebaliknya, integral merupakan alat praktis yang sehari-hari digunakan dalam dunia ekonomi untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan nyata. Perusahaan memanfaatkannya untuk menghitung biaya dan pendapatan, pemerintah memanfaatkannya untuk menilai efisiensi kebijakan, investor menggunakannya untuk menganalisis risiko, dan ekonom akademis menggunakannya untuk membangun model-model teoritis yang lebih mendalam.

Demikian, integral dalam ilmu ekonomi dapat dipandang sebagai bahasa matematika yang menghubungkan antara perubahan kecil (marginal) dengan totalitas (akumulasi). Ia menjembatani antara teori dan praktik, antara konsep abstrak dengan kebutuhan konkret. Dengan integral, ekonomi dapat dianalisis tidak hanya berdasarkan intuisi, tetapi juga berdasarkan perhitungan kuantitatif yang presisi. Oleh karena itu, penguasaan konsep integral menjadi salah satu kunci penting bagi siapa pun yang ingin mendalami ilmu ekonomi secara serius.

GLOSARIUM

Akumulasi : Proses penambahan nilai secara bertahap dari waktu ke waktu, biasanya digunakan dalam konteks investasi, bunga, atau data kuantitatif.

Alternatif : Pilihan lain yang tersedia dalam pengambilan keputusan atau pemecahan masalah.

Aritmatika : Cabang matematika yang mempelajari operasi dasar bilangan seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Asuransi : Sistem perlindungan finansial terhadap risiko atau kerugian, biasanya melalui pembayaran premi kepada perusahaan asuransi.

Cramer : **(Aturan Cramer)** Metode dalam aljabar linear untuk menyelesaikan sistem persamaan linear menggunakan determinan matriks.

Derivatif : Konsep dalam kalkulus yang menggambarkan laju perubahan suatu fungsi terhadap variabelnya.

Diferensial : Bagian dari kalkulus yang mempelajari perubahan kecil dalam variabel dan bagaimana perubahan ini memengaruhi fungsi.

Digitalisasi : Proses konversi data atau informasi ke dalam format digital, yang dapat dianalisis atau diproses dengan komputer.

Elastisitas : Ukuran responsivitas suatu variabel terhadap perubahan variabel lain, seperti elastisitas permintaan terhadap harga.

Filosofis : Berkaitan dengan pendekatan konseptual dan dasar pemikiran yang mendalam, sering dalam konteks teori atau metodologi.

Fiskal : Berkaitan dengan kebijakan pemerintah dalam pengelolaan pendapatan dan pengeluaran negara.

Fluktuasi : Perubahan yang tidak stabil atau naik-turun dalam data ekonomi seperti harga atau tingkat produksi.

Implisit : Tidak dinyatakan secara langsung namun tersirat; dalam konteks matematika atau ekonomi, sering merujuk pada fungsi yang tidak dituliskan secara eksplisit.

Inelastis : Keadaan di mana perubahan harga hanya menyebabkan sedikit perubahan pada jumlah yang diminta atau ditawarkan.

Inflasi : Kenaikan umum harga barang dan jasa dalam suatu perekonomian selama periode waktu tertentu.

Integral : Konsep dalam kalkulus yang menghitung luas di bawah kurva suatu fungsi; digunakan untuk menghitung total akumulasi.

Interpretasi : Penafsiran atau pemahaman terhadap data, hasil analisis, atau makna suatu konsep.

Interval : Rentang antara dua nilai yang digunakan dalam statistik dan kalkulus, misalnya sebagai batas dalam pengintegralan.

Kolektif : Bersifat bersama atau dilakukan oleh sekelompok orang; sering digunakan dalam konteks data atau keputusan bersama.

Konstanta : Nilai tetap yang tidak berubah dalam suatu persamaan atau fungsi matematika.

Kuadrat : Pangkat dua dari suatu bilangan atau variabel; digunakan dalam berbagai metode statistik dan matematika.

Kuantitatif : Berkaitan dengan jumlah atau angka; pendekatan berbasis data numerik dan analisis statistik.

Kumulatif : Bersifat menumpuk atau terakumulasi dari waktu ke waktu.

Optimasi : Proses pencarian nilai terbaik dari suatu fungsi atau sistem, seperti memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan biaya.

Polinomial : Fungsi matematika yang terdiri dari jumlah beberapa suku dengan variabel berpangkat.

Presisi : Tingkat ketelitian atau konsistensi hasil dalam pengukuran atau perhitungan.

Primitif : Fungsi asal dari suatu turunan dalam kalkulus; kebalikan dari proses diferensiasi.

Regresi : Metode statistik untuk menentukan hubungan antara satu atau lebih variabel independen dan variabel dependen.

Resesi : Penurunan aktivitas ekonomi secara signifikan selama dua kuartal berturut-turut atau lebih.

Stabilitas : Kemampuan suatu sistem untuk tetap dalam keadaan seimbang atau kembali ke keadaan semula setelah terganggu.

Utilitas : Ukuran tingkat kepuasan atau manfaat yang diperoleh konsumen dari konsumsi barang atau jasa.

DAFTAR PUSTAKA

Ekawaty, M., & Marlina, [nama penulis bersama jika ada]. (2024). Mudah Memahami Matematika Ekonomi Melalui Konsep dan Aplikasi. Jakarta: Rajawali Pers.

Wati, I., Habibi, M. H. M., & Nasrul, H. S. (2023). Matematika Ekonomi Integrasi Islam. Jakarta: Rajawali Pers.

Ridwan, A., & Sari, B. P. (2025). Matematik Ekonomi dan Pembangunan. Bandung: Deepublish.

Agustin, C., Hidayat, D., & Rizal, E. (2024). Pendekatan Matematika dalam Ekonomi Mikro. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Putri, F., Santoso, G., & Lestari, H. (2023). Kalkulus Terapan untuk Mahasiswa Ekonomi. Jakarta: Erlangga.

Firdaus, I., & Wibowo, J. (2025). Analisis Ekonomi dengan Metode Matematika. Surabaya: Kampus Press.

Dewi, K., & Prasetyo, L. (2022). Model Matematika dalam Ekonomi Makro. Semarang: Unggul Press.

Setiawan, M., & Widya, N. (2024). Matematika untuk Statistik Ekonomi. Medan: Universitas Sumatera Utara Press.

Anwar, O., & Yanti, P. (2023). Optimasi Ekonomi dengan Kalkulus. Makassar: Celebes Media.

Zulkarnain, Q., Rahma, R., & Sari, S. (2021). Aplikasi Integral dalam Ekonomi. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.

Iskandar, T., & Utami, U. (2025). Persamaan Diferensial dalam Ekonomi. Palembang: Unsri Press.

Cahyono, V., & Wahid, W. (2022). Matematika Ekonomi: Teori dan Simulasi. Bali: Lembaga Pendidikan Bali.

Edi, X., & Yuliana, Y. (2023). Statistika Matematika untuk Manajer. Bandung: Alfabeta.

Farid, Z., & Ainiatan, A. (2025). Rangkaian Kalkulus dalam Analisis Biaya. Depok: UI Press.

Ginanjar, B., & Hartono, C. (2024). Model Linear Ekonomi. Malang: UB Press.

Hartati, D., & Indra, F. (2021). Ekonomi Dinamik dan Integral. Yogyakarta: UNY Press.

Irawan, E., & Julianti, G. (2022). Kalkulus dan Ekonomi Publik. Jakarta: Rajawali Pers.

Junaidi, F., & Kartika, H. (2024). Persamaan Linear dalam Ekonomi. Bandung: Penerbit Pendidikan.

Kurniawan, G., & Lutfiah, I. (2023). Simulasi Matematika Ekonomi. Surakarta: UNS Press.

Latifah, H., & Malik, J. (2021). Matematika Ekonomi Modern. Makassar: UMI Press.

Maulana, I., & Novianti, K. (2022). Teori Permintaan dan Penawaran. Bandar Lampung: Unila Press.

Nurhayati, J., & Osman, L. (2025). Statistika Terapan dalam Ekonomi. Bogor: IPB Press.

Oktaviani, K., & Prabowo, M. (2023). Analisis Input-Output untuk Ekonom. Semarang: UNDIP Press.

Pratama, L., & Qodri, M. (2024). Transformasi Matematika ke Biaya Total. Palembang: UPN Press.

Qaris, M., & Rizki, N. (2022). Matematika dan Distribusi. Yogyakarta: UGM Press.

Rahmat, N., & Sulaiman, O. (2021). Pengantar Ekonomi Matematika. Jakarta: Kencana.

Santika, O., & Taufik, P. (2025). Model Stokastik Ekonomi. Bandung: ITB Press.

Utami, P., & Vania, Q. (2023). Simulasi Surplus Konsumen dan Produsen. Jakarta: Salemba Empat.

Wibowo, Q., & Xaverius, R. (2022). Fungsional Ekonomi dan Integral. Semarang: Parama Publishing.

Yudha, R., & Zulfikar, S. (2024). Dinamik Sistem Ekonomi. Medan: USU Press.

Zulkarnaen, S., & Alamsyah, T. (2021). Aljabar Matriks dalam Ekonomi. Makassar: UNU Press.

Anggraini, T., & Budiarto, U. (2025). Aplikasi Matematika dalam Mikroekonomi. Jakarta: PTR-Gama Media.

Bakri, U., & Chandra, V. (2023). Optimasi dan Linear Programming. Depok: IPB Press.

Cakrawati, V., & Dwi, W. (2024). Input-Output Ekonomi Regional. Bandung: Erlangga.

Damanik, W., & Eko, X. (2021). Model Ekonomi Non-linier. Yogyakarta: UNY Press.

Erizal, X., & Fathoni, Y. (2022). Data Ekonomi dan Statistik Matematika. Lampung: Unila.

Farhana, Y., & Guntur, Z. (2023). Materi Ekonomi Matematika untuk Sarjana. Bandung: Kiblat Buku.

Gusmala, Z., & Hendra, A. (2025). Analisis Multivariat Ekonomi. Jakarta: UI Press.

Husin, A., & Indriyani, B. (2024). Matematika Ekonomi dan Kebijakan Publik. Semarang: UNDIP Press.

Imran, B., & Juliana, C. (2021). Model Ekonomi Makro Terapan. Surabaya: UB Press.

Jafar, C., & Kartini, D. (2022). Kalkulus dalam Teori Keputusan. Jakarta: LIPI Press.

Kiki, D., & Luthfi, E. (2023). Linear Algebra untuk Ekonomi. Bandung: ITB Press.

Laila, E., & Muhammad, F. (2025). Matematika Keuangan dan Ekonomi. Yogyakarta: UGM Press.

Mirza, F., & Nur, G. (2024). Optimasi Sumber Daya Ekonomi. Malang: UB Press.

Nabil, G., & Odgan, H. (2021). Analisis Game Teoritis dengan Matematika. Jakarta: Rajawali Pers.

Putra, H., & Qomar, I. (2022). Stokastik dan Pengambilan Keputusan Ekonomi. Medan: USU Press.

Ruslan, I., & Sari, J. (2023). Matriks dan Model Input-Output. Bandung: Widina.

Solo, J., & Tia, K. (2025). Ekonomi Matematika untuk Ekonomi Islam. Jakarta: Rajawali Pers.

Triana, K., & Utomo, L. (2024). Kalkulus Terapan dalam Ekonomi Sumber Daya Alam. Samarinda: Mulawarman Press.

Valentino, L., & Widuri, M. (2023). Pendekatan Kuantitatif dalam Ekonomi Kebijakan. Bandung: Alfabeta.

TENTANG PENULIS

Dr. Drs. Amirul Syah, M.Si adalah seorang akademisi dan peneliti di bidang Manajemen Sumber Daya Manusia Syariah serta bidang-bidang terkait seperti Matematika Ekonomi dan Bisnis serta Statistik Ekonomi. Ia lahir di Labuhan Batu pada tanggal 3 Oktober 1967, dan saat ini berdomisili di Medan, tepatnya di Jl. Karya Jaya No.75.

Pendidikan formal beliau dimulai dari SDN Teluk Sentosa Ajamu dan dilanjutkan ke SMP Yapendak Ajamu serta SMA Josua Medan jurusan IPA. Beliau meraih gelar Sarjana Matematika dari IKIP Negeri Medan pada tahun 1991, kemudian melanjutkan pendidikan magister di bidang Ekonomi Studi Pembangunan di Universitas Syiah Kuala (UNSYIAH) Banda Aceh dan lulus pada tahun 2002. Gelar doktor di bidang Ekonomi Syariah diperoleh dari Universitas Islam Negeri Sumatera Utara (UINSU) Medan pada tahun 2020.

Dalam dunia pendidikan tinggi, Dr. Amirul Syah merupakan dosen tetap di Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara (UMSU), dengan ikatan kerja sebagai Dosen PNS DPK. Ia juga tercatat sebagai dosen luar biasa di FEB UISU sejak tahun 1999. Sebelumnya, beliau memiliki pengalaman kepemimpinan sebagai Kepala Sekolah SMPN 25 Medan dari tahun 2010 hingga 2020, serta pernah menjadi instruktur tingkat nasional untuk program DBE-3 Amerika–Indonesia pada tahun 2006–2012.

Jabatan fungsional beliau adalah Lektor dengan angka kredit 300, terhitung sejak 1 Mei 2022. Beliau berada pada pangkat Pembina Tingkat I (IV/b) sejak 1 Oktober 2018.

Dalam kehidupan pribadi, beliau adalah suami dari Profesor Dr. Safrida, SE, M.Si dan ayah dari dua anak: Atika Miranda Putri, B.A, SE, M.Ba dan Muhammad Zukhri Ihsan, SE.

Dr. Amirul Syah telah banyak berkontribusi dalam bidang keilmuan dengan menghasilkan berbagai karya ilmiah, baik dalam bentuk buku referensi, jurnal internasional terindeks Scopus, jurnal Nasional terakreditasi SINTA, maupun prosiding konferensi nasional dan internasional. Beberapa karya populernya meliputi:

- Buku *Dinamika Tim: Membangun Kerjasama dan Sinergi di Tempat Kerja*
- Buku *Dasar-Dasar Ekonomi Syariah: Prinsip dan Aplikasinya*
- Artikel Scopus Q1: *The Mediating Role of Organizational Citizenship Behavior (OCB) on Employee Performance*

Karya-karya beliau mencakup topik-topik seperti perilaku organisasi, kepemimpinan, kinerja karyawan, pendidikan, ekonomi syariah, serta pemberdayaan masyarakat berbasis masjid. Penelitiannya tidak hanya bersifat teoritis tetapi juga aplikatif, menjadikannya kontributor penting dalam pengembangan keilmuan dan praktik manajemen serta pendidikan di Indonesia.

INDEKS

Buku Ajar

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Buku Ajar Matematika Ekonomi dan Bisnis disusun sebagai panduan bagi mahasiswa dalam memahami konsep dan penerapan matematika di bidang ekonomi. Buku ini memadukan teori dasar matematika dengan contoh-contoh aplikasi nyata dalam analisis ekonomi, sehingga pembaca dapat melihat relevansi langsung antara keduanya. Materi dalam buku ini meliputi:

- Konsep dasar aljabar dan fungsi,
- Diferensial dan integral beserta aplikasinya dalam analisis ekonomi,
- Optimasi fungsi untuk menentukan efisiensi dan keuntungan maksimum,
- Penerapan matematika pada model pertumbuhan ekonomi, konsumsi, dan produksi.

Dengan penyajian yang sistematis, dilengkapi contoh soal dan latihan, buku ini memudahkan mahasiswa untuk belajar secara bertahap, dari pemahaman konsep dasar hingga penerapannya pada kasus-kasus ekonomi.

Buku ini ditujukan bagi mahasiswa ekonomi, bisnis, maupun bidang ilmu sosial lainnya yang membutuhkan keterampilan analisis matematis untuk mendukung pemahaman teori ekonomi dan pengambilan keputusan.

UMSU PRESS
Jl. Kapten Mukhtar Basri No. 3
Medan, Sumatera Utara
Website: http://umsupress.umsu.ac.id/
Email: umsupress@umsu.ac.id

REFERENSI
ISBN 978-634-236-190-0
9 786342 361900
ISBN 978-634-236-191-7 (EPUB)
9 786342 361917
Harga P. Jawa Rp. 92.000,00